

THESE

Présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES
DE L'UNIVERSITE DE BESANCON

POUR OBTENIR

LE DIPLOME DE DOCTEUR EN PHYSIQUE
MENTION MECANIQUE

PAR

Michel BERNARD

SUR L'APPLICATION DES POLYNOMES ORTHOGON-
NAUX A LA MECANIQUE NON LINEAIRE

SOUTENUE LE 17 JUIN 1975 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

JURY :

MM. CHALEAT

Président

GREMILLARD

VANDOOREN

BALBI

} Examineurs

THESE

Présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES
DE L'UNIVERSITE DE BESANCON

POUR OBTENIR

LE DIPLOME DE DOCTEUR EN PHYSIQUE
MENTION MECANIQUE

PAR

Michel BERNARD

SUR L'APPLICATION DES POLYNOMES ORTHOGONAUX
A LA MECANIQUE NON LINEAIRE

SOUTENUE LE 17 JUIN 1975 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

JURY :

MM. CHALEAT

Président

GREMILLARD

VANDOOREN

BALBI

} Examineurs



UNIVERSITE DE BESANCON

Président : Monsieur THIEBAUT Jean

FACULTE DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

DOYEN

M BERNARD Jean : Chimie-Physique
Professeur :

ASSESSEUR

M PARIZET Jean : Mathématiques
Professeur :

PROFESSEURS

MM CHATELET François : Mathématiques
MESNAGE Pierre : Chronométrie
PERROT Roger : Chimie Générale
PLUVINAGE Philippe : Physique Théorique
QUANTIN André : Pédologie
CHALEAT Raymond : Mécanique Appliquée
RIPPLINGER Jean : Physiologie Animale
GREMILLARD Jean : Mathématiques
VIENOT Jean-Charles : Physique Générale-Optique
THIEBAUT Jean : Pétrographie-Minéralogie
GOMOT Lucien : Zoologie et Embryologie
BENNETON Gaston : Mathématiques
GALATRY Louis : Physique Moléculaire
THEOBALD Jean-Gérard : Spectroscopie Hertz.
CERUTTI Ernest : Chimie Appliquée
DEVIN Claude : Chimie 1er cycle
CAPODANNO Pierre : Mécanique Théorique
BANTEGNIE Robert : Mathématiques
ROBERT Daniel : Physique Moléculaire
ROBERT Jacques : Mathématiques I
CHAUVE Pierre : Géologie-Minéralogie
RANGHEARD Yves : Géologie

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM POTIER Robert : Physique des Solides
REAL Pierre : Ecologie animale
GOUARNE René : Mathématiques
MERIGOUX Henri : Cristallographie et
Synthèses minérales
OLIVIER Marcel : Electronique Quantique
MONTAGNER Hubert : Psychophysiologie
BULABOIS Jean : Physique Générale-Optique
GAUDEMER Yves : Biochimie
LAUDE BERNARD : Chimie Organique
MIELLOU Jean-Claude : Analyse Numérique
ROBERT Guy : Electrochimie

DOYENS HONORAIRES

MM GLANGEAUD, JACQUEMAIN, CHATELET,
THIEBAUT.

PROFESSEURS HONORAIRES

MM BAILLAUD, DUFFIEUX, THIRY, TRILLAT
UEBERSFELD, VICENSINI, DREYFUSS,
TRONCHET, THEOBALD.

MAITRE DE CONFERENCES HONORAIRE

M GRANIER

MAITRES DE CONFERENCES

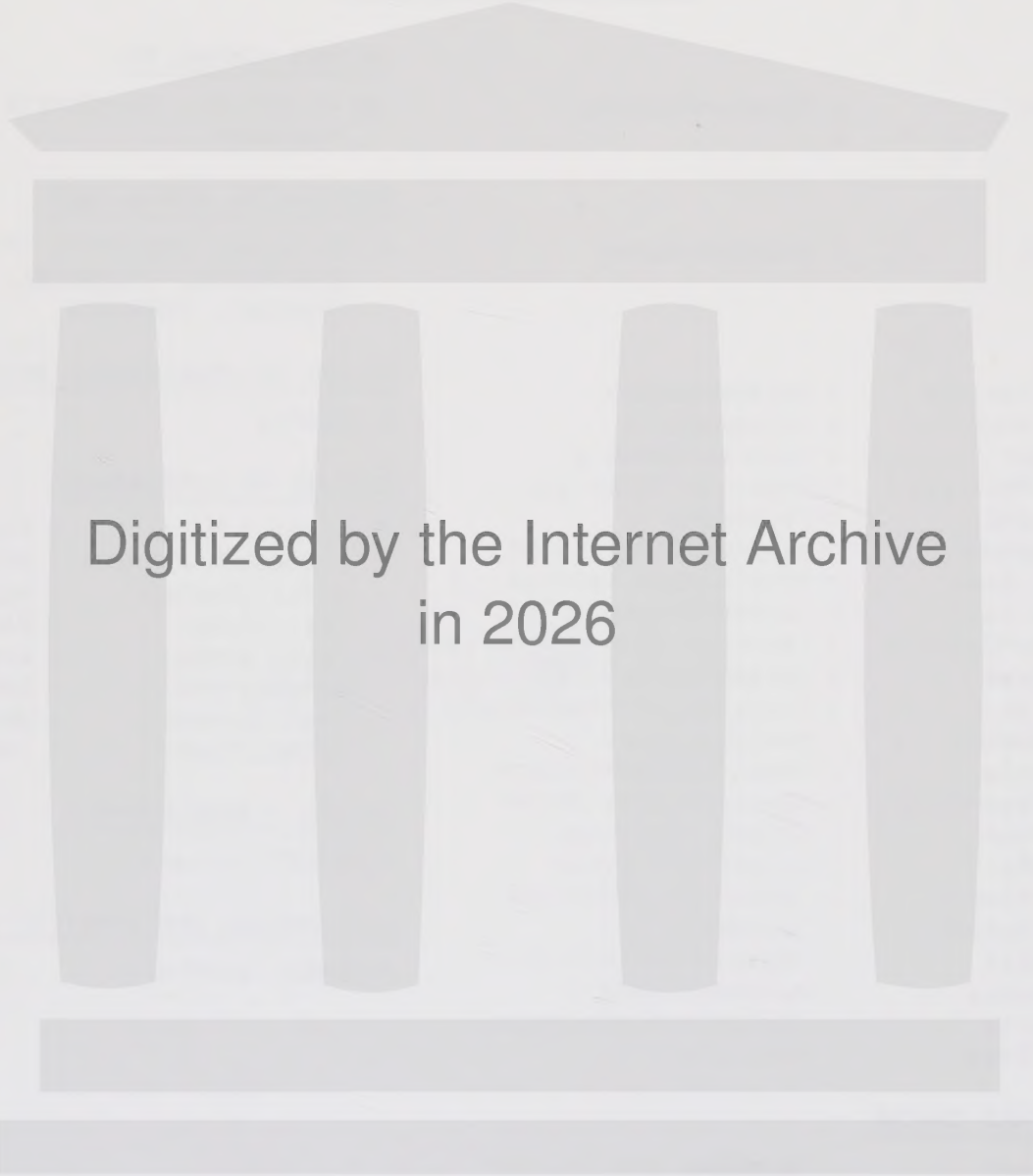
MM BIDAULT Michel : Taxonomie Exp.
DUBOUCHET Jacques : Botanique
MARLE Charles : Mathématiques
WEIL Michel : Mathématiques
HAYLI Avram : Astronomie
BROQUET PAUL : Géologie
GRAS Georges : Mathématiques
TREHEL Michel : Informatique

CHARGE D'ENSEIGNEMENT

M MILLET Bernard

RESPONSABLE DES SERVICES ADMINISTRATIFS

M RUNGE Jean-Marie



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546611_0004

SUR L'APPLICATION DES POLYNÔMES ORTHOGONAUX

A LA MECANIQUE NON - LINEAIRE

Je remercie très sincèrement Monsieur le Professeur CHALEAT qui a bien voulu m'accueillir dans son laboratoire et m'a initié à la Mécanique non-linéaire.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Messieurs les Professeurs CAPODANNO et GREMILLARD ainsi qu'à Monsieur VAN DOOREN de l'Université Libre de Bruxelles qui me font l'honneur de participer à mon Jury.

J'adresse mes plus sincères remerciements à Monsieur BALBI, Maître-Assistant Agrégé qui m'a aidé et guidé tout au long de mes travaux. Sa collaboration a très largement contribué à la conception et à la réalisation de cette étude.

Je tiens aussi à remercier Monsieur PIRANDA de l'aide apportée, pour la partie numérique de ce rapport.

S O M M A I R E

- INTRODUCTION

- PREMIERE PARTIE

- CHAPITRE I : RAPPELS, ESPACE DE HILBERT, OPERATEURS AUTO-ADJOINTS

- I.A : Espace de HILBERT

I-A-1 : Produit scalaire de deux vecteurs.

I-A-2 : Norme d'un vecteur, Espace pré-Hilbertien.

I-A-3 : Espace complet, Espace Hilbertien.

- I.B : Espace Fonctionnel

I-B-1 : Espace des fonctions continues.

I-B-2 : Produit scalaire de deux fonctions.

I-B-3 : Fonctions orthogonales.

- I.C : Approximation en moyenne quadratique

- I.C : Rappels sur les opérateurs et systèmes auto-adjoints

I-D-1 : Opérateurs adjoints et auto-adjoints.

I-D-2 : Systèmes auto-adjoints, valeurs propres, vecteurs propres.

I-D-3 : Orthogonalité relative à un opérateur.

- CHAPITRE II : POLYNÔMES ORTHOGONAUX, PROPRIETES GENERALES

- II.A : Les polynômes orthogonaux - Définition.

II-A-1 : Rappels

II-A-2 : Généralisation.

- II.B : Calcul des polynômes orthogonaux

II-B-1 : Formule de RODRIGUEZ

II-B-2 : Généralisation de la formule de RODRIGUEZ.

- II.C : Rappels sur le développement en série d'une fonction quelconque suivant les polynômes orthogonaux.

- II.D : Compléments à l'étude des polynômes de GEGENBAUER.

- CHAPITRE III : PRINCIPE DE L'UTILISATION DES POLYNÔMES ORTHOGONAUX A LA RESOLUTION D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES NON-LINEAIRES.

- III.A : Forme approchée de la période d'une équation différentielle du second ordre non-linéaire de la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0 .$$

- III.B : Etude de l'équation : $\frac{d^2x}{dt^2} + ax + bx^3 = 0$.

- III.C : Etude de l'équation : $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 \sin x = 0$.

α : Première approximation

β : Deuxième approximation

- III.D : Etude des oscillations asymétriques.

- III.E : Etude des équations différentielles non-linéaires forcées du type : $\ddot{x} + g(\dot{x}) + f(x) = F_0 \sin pt + F_1$.

- CHAPITRE IV : EXTENSION DE LA METHODE PRECEDENTE : QUELQUES RAPPELS SUR LA LINEARISATION EQUIVALENTE POUR LES OSCILLATEURS A UN DEGRE DE LIBERTE.

- IV.A : Système de la forme : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu f(x, \dot{x}, t)$

IV-A-1 : Recherche de la solution générale.

IV-A-2 : Recherche de la solution périodique pour
le système : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu f(x, \dot{x})$

IV-A-3 : Solution périodique pour l'oscillateur forcé.

- IV.B : Utilisation des polynômes orthogonaux et méthode de linéarisation équivalente.

- DEUXIEME PARTIE : APPLICATIONS

- II - 1 : Etude de l'équation : $\ddot{x} + x^3 = 0$.

- II - 2 : Etude de l'équation : $\ddot{x} + x + \mu x^3 = 0$.

- II - 3 : Etude de l'équation : $\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0$.

- II - 4 : Etude de l'équation : $\ddot{x} + x^3 = \sin t$.

- II - 5 : Etude de l'équation : $\ddot{x} + 0,2 \dot{x} + x^3 = 0,3 \cos t$.

- II - 6 : Etude de l'équation de Van der Pol forcée :
 $\ddot{x} - \mu (1 - x^2) \dot{x} + x = \mu \sin t$.

- II - 7 : Cas de l'équation à retard :

$$\ddot{x}(t) - 0,1 \ddot{x}(t - 1) + 0,1 \dot{x}(t) + x^3(t - 1) = 0.$$

- II - 8 : Cas de deux équations couplées :

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \left[q_1 + 2 \cdot 10^{-\lambda} (q_1^3 + 0,4 q_1 q_2^2) \right] &= 0,3 \cos 0,95 t, \\ \ddot{q}_2 + \left[q_2 + 10^{-\lambda} (q_2^3 + 1,5 q_2 q_1^2) \right] (1,05)^2 &= 0,1 \cos 0,95 t \end{aligned}$$

- II - 9 : Etude de l'équation de Van der Pol :

$$\ddot{x} - \mu \omega_0 (1 - x^2) \dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

- CONCLUSION

- ANNEXE : Quelques applications des polynômes orthogonaux.

A) - Applications des polynômes de GEGENBAUER au calcul des fréquences propres des vibrations transversales d'une corde tendue.

B) - Extension des modèles mécaniques précédemment étudiés, au domaine de l'électricité.

C) - Application des polynômes $C_n^1(x)$ de GEGENBAUER à l'étude des quadripôles.

I N T R O D U C T I O N

Lorsqu'on passe en revue les méthodes utilisées pour déterminer les solutions approchées des équations différentielles non-linéaires, on constate qu'elles relèvent de l'une des deux classes suivantes :

- les non-linéarités sont très petites : auquel cas de nombreuses méthodes sont utilisables, ce sont les méthodes de perturbation.
- les non-linéarités sont très importantes : on utilise alors les méthodes asymptotiques mises au point pour les oscillateurs de relaxation.

Dans le cas intermédiaire où les non-linéarités ne sont ni très petites ni très grandes, indépendamment des méthodes numériques, il n'existe actuellement que peu de moyens permettant la détermination de la solution. On peut cependant citer dans ce cas, la méthode proposée par Van DOOREN qui utilise une heureuse combinaison de la balance harmonique et des méthodes de perturbation.

Le but du présent travail est d'étudier un procédé pratique permettant d'obtenir sous forme analytique les solutions approchées de certains types d'équations différentielles. La forme analytique possède sur les solutions numériques l'avantage de mettre en évidence l'influence des différents paramètres et de permettre la discussion du mouvement des oscillateurs.

Dans ce qui suit, nous nous intéresserons uniquement aux solutions périodiques des équations envisagées, sans nous préoccuper de l'existence, prouvée par ailleurs de telles solutions.

La méthode utilisée repose sur deux points essentiels :

- 1°) développer la fonction perturbatrice en série de polynômes orthogonaux afin d'utiliser la convergence rapide de ceux-ci,
- 2°) appliquer ensuite une méthode de perturbations, plus particulièrement la méthode de linéarisation équivalente.

Pour préciser ces deux points envisageons par exemple l'équation différentielle : $\ddot{x} + f(x) = 0$, (1)

où $f(x)$ est la fonction perturbatrice impaire. Dans ce cas on sait que (1) admet une solution périodique $x(t)$ comprise entre $-A$ et $+A$.

$$\text{Soit } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(x)$$

le développement de $f(x)$ en série de polynômes orthogonaux $P_n(x)$ l'équation (1) s'écrit :

$$\ddot{x} + a_1 P_1(x) = - \sum_{n=2}^{+\infty} a_n P_n(x) \quad (2)$$

En raison de la convergence rapide des polynômes P_n le second membre de (2) est considéré comme un terme perturbateur et l'on applique à l'équation (2) la méthode de linéarisation équivalente. Ce même principe permet de résoudre de nombreux types d'équations différentielles non-linéaires.

Il est indispensable par ailleurs de comparer les résultats ainsi obtenus à ceux fournis par d'autres méthodes et ce sur le plus grand nombre d'exemples possibles. Cette confrontation constitue une partie importante du présent travail dont il forme la seconde partie.

La première partie comporte quatre chapîtres. Le premier est consacré à quelques rappels mathématiques nécessaires à la compréhension de la suite. Les propriétés générales des polynômes orthogonaux sont présentées brièvement dans le second chapître. Le principe d'utilisation des polynômes orthogonaux pour la résolution des équations différentielles non-linéaires, fait l'objet du troisième chapître. Enfin le dernier chapître de cette première partie concerne la généralisation des résultats précédents et l'exposé de la méthode proposée.

Différents exemples d'utilisation des polynômes orthogonaux en physique mathématique sont présentés en annexe.

CHAPITRE I

RAPPELS : ESPACE DE HILBERT, OPERATEURS AUTO - ADJOINTS

I - A - ESPACE DE HILBERT

I - A - 1 Produit scalaire de deux vecteurs

Soit ϵ un espace vectoriel complexe (ou réel).

On appelle produit scalaire sur ϵ une application qui à chaque couple x, y d'éléments de ϵ fait correspondre un nombre complexe (ou réel) noté (x, y) , cette application ayant les propriétés suivantes :

- | | |
|---|-------------------------------------|
| a) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$, | } linéarité du produit
scalaire. |
| b) $(m x, y) = m(x, y)$,
$\rightarrow (x, my) = \overline{m}(x, y)$, | |
| (I - 1) | |
| c) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, | |
| d) $(x, x) \geq 0$; positivité, | |
| e) $(x, x) = 0 \iff x = 0$. | |

L'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs est donnée par $(x, y) = \sum g_{ik} x_i \overline{y_k}$, où les vecteurs sont représentés par leurs composantes par rapport à une base $E_1, E_2 \dots E_n$,

$$x = \sum x_i E_i \quad , \quad y = \sum y_k E_k \quad , \quad \text{et } (E_i, E_k) = g_{ik} \quad .$$

Deux vecteurs sont dits orthogonaux si leur produit scalaire est nul. Ils seront dits orthonormés, si de plus, leurs longueurs sont égales à 1.

Dans le cas de vecteurs réels : si n vecteurs non nuls sont deux à deux orthogonaux, ils sont linéairement indépendants et constituent par suite une base.

I - A - 2 Norme d'un vecteur, Espace pré-Hilbertien

On appelle norme d'un vecteur, l'application qui à un élément x de ϵ fait correspondre le nombre positif ou nul. $\sqrt{(x, x)}$ noté $\|x\|$.

Un espace vectoriel, muni d'un produit scalaire (x, y) et à partir duquel on peut définir la norme du vecteur x est appelé espace pré-hilbertien.

I - A - 3 Espace complet, Espace Hilbertien

- On dit qu'un espace E (métrique) est complet si toute suite de Cauchy d'éléments de E est convergente (vers un élément de E).

- On dit qu'une suite $\left\{ x_n \right\}_{n=0, 1 \dots}$ d'éléments d'un espace E (métrique) est une suite de Cauchy, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N : \left. \begin{array}{l} n > N \\ m > N \end{array} \right\} \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

$d(x_n, x_m)$ = distance de x_n à x_m .

Si un espace muni de la norme définie précédemment est complet, on dit qu'il a une structure d'espace de Hilbert.

I - B - ESPACE FONCTIONNEL

Dans tout ce qui suivra, pour que la définition de la norme donnée précédemment (donc de l'espace de Hilbert) reste vraie, on se placera dans le cas d'un espace E de fonctions continues.

Ce qui implique que toutes ces fonctions seront intégrables dans tout l'intervalle où elles sont continues.

I - B - 1 Espace des fonctions continues

Soient φ et ψ deux fonctions réelles continues, donc les intégrales

$$\int_{\Delta} \varphi^2 dx, \quad \int_{\Delta} \psi^2 dx \text{ existent et l'on montre de même que le produit } \varphi \psi$$

est intégrable sur Δ .

Les résultats sont identiques (application à l'inégalité de Schwarz) si φ et ψ sont deux fonctions complexes continues.

Le produit $\varphi \overline{\psi}$ est donc intégrable sur Δ , ainsi que la somme $\varphi + \psi$

L'ensemble E des fonctions continues sur Δ constitue donc, un espace vectoriel H de fonctions.

I - B - 2 Produit scalaire de deux fonctions continues

A deux fonctions φ et ψ de l'espace H on peut associer le nombre $(\varphi, \psi) = \int_{\Delta} \varphi \overline{\psi} dx$, ayant toutes les propriétés du produit scalaire (I - 2)

$$\left. \begin{aligned} (\varphi_1 + \varphi_2, \psi) &= (\varphi_1, \psi) + (\varphi_2, \psi) , \\ (m\varphi, \psi) &= m(\varphi, \psi) , \\ (\varphi, \psi) &= \overline{(\psi, \varphi)} , \\ (\varphi, \varphi) &\text{ est réel positif si } \varphi \neq 0, \text{ nul si } \varphi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (I - 3)$$

(φ, ψ) s'appelle produit scalaire de deux fonctions.

L'intégrale $\int_{\Delta} |\varphi|^2 dx$ est la norme de φ .

Il est directement possible d'étendre la notion de produit scalaire de deux fonctions, au produit scalaire dit "pondéré" défini par $(\varphi, \psi) = \int_{\Delta} \varphi(x) \overline{\psi(x)} p(x) dx$, (I - 4) l'introduction de cette densité $p(x)$ ne modifie pas les résultats précédents, mais il sera souvent intéressant d'étudier les polynômes orthogonaux (Chap. II) relativement à certaines densités $p(x)$ particulières.

L'espace H ainsi défini possède donc toutes les propriétés algébriques de l'espace de Hilbert.

I - B - 3 Fonctions orthogonales

Soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ deux fonctions réelles ou complexes continues de la variable x , intégrables sur un intervalle Δ .

On dit que $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont orthogonales sur Δ si :

$$\int_{\Delta} \varphi(x) \overline{\psi}(x) dx = 0. \quad (I - 5)$$

La suite de fonction $\varphi_1(x) \dots \varphi_n(x) \dots$ est orthonormale. si :

$$\int_{\Delta} \varphi_n(x) \overline{\varphi_p}(x) dx = \delta_{np}. \quad (I - 6)$$

δ_{np} : Symbole de Kronecker.

I - C - APPROXIMATION MOYENNE QUADRATIQUE

Soit une suite finie $\varphi_1(x) \dots, \varphi_n(x)$ de fonctions orthonormées.

Soit $f(x)$ une fonction de carré intégrable. On cherchera à représenter "le mieux possible" $f(x)$ par une combinaison linéaire des $\varphi_n(x)$:

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x).$$

Cela revient à dire que la différence $f(x) - \sum_{p=1}^n \alpha_p \varphi_p(x)$ devra être "aussi petite que possible".

Nous choisirons donc les φ_n de telle manière que la "longueur" de la fonction $f(x) - \sum \alpha_p \varphi_p(x)$ soit minimale, c'est-à-dire que l'intégrale

$$\int_{\Delta} \left| f - \sum_{p=1}^n \alpha_p \varphi_p \right|^2 dx \text{ soit minimale.}$$

En développant le carré on trouve :

$$\int_{\Delta} |f|^2 dx - \sum_{p=1}^n \overline{\alpha_p} \int_{\Delta} f \overline{\varphi_p} dx - \sum \alpha_p \int_{\Delta} \overline{f} \varphi_p dx + \sum \alpha_p \overline{\alpha_q} \int_{\Delta} \varphi_p \overline{\varphi_q} dx.$$

$$\text{En rappelant que } |A - B|^2 = (A - B)(\overline{A} - \overline{B}) = |A|^2 - A\overline{B} - B\overline{A} + |B|^2.$$

Comme les $\varphi_p(x)$ forment un système orthogonal la dernière somme se réduit à $\sum |\alpha_p|^2$.

Posons $a_p = \int_{\Delta} f \overline{\varphi_p} dx$, a_p étant le coefficient de Fourier de $f(x)$, relativement au système orthonormal φ_p , d'où l'intégrale s'écrit :

$$\|f\|^2 = \sum a_p \overline{a_p} = \sum \overline{a_p} \alpha_p + \sum \alpha_p \overline{a_p} = \|f\|^2 - \sum |a_p|^2 + \sum (a_p - \alpha_p)(\overline{a_p} - \overline{\alpha_p})$$

$\sum (a_p - \alpha_p)(\overline{a_p} - \overline{\alpha_p}) = \sum |a_p - \alpha_p|^2$ cette somme est positive sauf si $\alpha_p = a_p$, elle sera alors nulle.

L'intégrale $\int_{\Delta} |f - \sum \alpha_p \varphi_p|^2 dx$ est minimum lorsque les coefficients α_p sont égaux aux coefficients de Fourier de f relativement à la suite des fonctions orthonormales φ_p .

On peut exprimer ce résultat en disant que la combinaison linéaire $a_1 \varphi_1 + \dots + a_n \varphi_n$ réalise la meilleure approximation en moyenne quadratique de la fonction f par n fonctions formant un système orthonormé.

$$\int_{\Delta} \left| f - \sum_{p=1}^n a_p \varphi_p \right|^2 dx = \int_{\Delta} |f|^2 dx - \sum_{p=1}^n |a_p|^2$$

$$\text{d'où } |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2 \leq \int_{\Delta} |f|^2 dx. \quad (\text{I} - 7) \text{ Inégalité de Bessel.}$$

Supposons maintenant que le système $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ soit infini lorsque $n \rightarrow \infty$ la somme $|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2 + \dots$ devient une série à termes positifs. Comme elle est inférieure à un nombre fixe $\|f\|^2$ indépendant de n , cette série est convergente et l'on a :

$$|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2 + \dots \leq \|f\|^2. \quad (\text{I}-8) \text{ Inégalité de Parseval.}$$

L'on dira que le système infini de fonctions φ_n est total si $\forall$ la fonction de carré intégrable, l'inégalité de Parseval se réduit à une égalité :

$$|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2 + \dots = \|f\|^2 = \int |f|^2 dx.$$

$$\text{Système total si : } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Delta} |f - (a_1 \varphi_1 + \dots + a_n \varphi_n)|^2 dx = 0. \quad (\text{I} - 9)$$

On dit que la série $\sum a_k \varphi_k(x)$ converge en moyenne quadratique vers $f(x)$ (ou en norme) dans l'espace E .

I - D - RAPPELS SUR LES OPERATEURS ET SYSTEMES AUTO-ADJOINTS

I - D - 1 Opérateurs adjoints et auto-adjoints

On appelle adjoint d'un opérateur L, l'opérateur $\overline{L}$ défini par $(\overline{L} x, y) = (x, Ly)$ (I - 10)

On définit les relations :

$$(\overline{L + M}) = \overline{L} + \overline{M} ,$$

$$(\overline{\alpha L}) = \overline{\alpha'} \overline{L} , \quad \alpha' : \text{complexe conjugué de } \alpha$$

$$(\overline{ML}) = \overline{L} \overline{M} ; \overline{(\overline{L})} = L \quad \text{et} \quad \overline{(L^{-1})} = (\overline{L})^{-1} .$$

On dit qu'un opérateur est hermitique ou auto-adjoint s'il coïncide avec son propre adjoint $\underline{L} = \overline{L}$. (I - 11)

I - D - 2 Systèmes auto-adjoints, valeurs propres, vecteurs propres

On appelle système différentiel linéaire, l'ensemble formé d'une équation différentielle linéaire et de conditions aux limites linéaires :

$$\text{Soit : } L(\omega) = A_n(\omega) \frac{d^n \omega}{dx^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} \omega}{dx^{n-1}} + \dots + A_0(\omega) . \quad (\text{I} - 12)$$

On appelle "opérateur différentiel linéaire" la forme :

$$L = A_n(\omega) \frac{d^n}{dx^n} + A_{n-1}(\omega) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + A_0(\omega) . \quad (\text{I} - 13)$$

$$\text{Soit } L(\omega) = L \omega = \left(\sum_{p=0}^n A_p \frac{d^p}{dx^p} \right) \omega$$

Le système différentiel peut donc se présenter sous la forme :

$$\begin{aligned} L \omega &= r \rightarrow \text{équation différentielle linéaire ,} \\ U_i \omega &= \psi_i \rightarrow \text{conditions aux limites linéaires .} \end{aligned} \quad (\text{I} - 14)$$

où r est fonction de ω .

Le problème étant homogène, les amplitudes des fonctions propres ω_r ($r = 1, 2, \dots$) sont arbitraires.

On montre en particulier que dans le cas de systèmes auto-adjoints ($v_j = u_j$), les fonctions propres forment une suite orthogonale. De plus les valeurs propres du système jouissent de la propriété d'être toutes réelles, et à chaque valeur propre correspond une seule fonction propre.

I - D - 3 Orthogonalité relative à un opérateur

Soient λ_r et λ_s deux valeurs propres distinctes et ω_r et ω_s les fonctions propres correspondantes, résultant de la solution d'un problème auto-adjoint, on peut écrire :

$$\left. \begin{aligned} L(\omega_r) &= \lambda_r M(\omega_r) , \\ L(\omega_s) &= \lambda_s M(\omega_s) . \end{aligned} \right\} \quad (\text{I} - 19)$$

En multipliant ces deux équations par ω_r et ω_s , en soustrayant ensuite ces deux équations l'une de l'autre et en intégrant sur le domaine D, nous obtenons : (I - 20) :

$$\int_D (\omega_s L(\omega_r) - \omega_r L(\omega_s)) dD = \int_D (\lambda_r \omega_s M(\omega_r) - \lambda_s \omega_r M(\omega_s)) dD$$

ω_r et ω_s étant solution d'un problème auto-adjoint, nous avons donc :

$$\left. \begin{aligned} \int_D \omega_s L(\omega_r) dD &= \int_D \omega_r L(\omega_s) dD , \\ \int_D \omega_s M(\omega_r) dD &= \int_D \omega_r M(\omega_s) dD . \end{aligned} \right\} \quad (\text{I} - 21)$$

et (I - 20) se réduit à : $(\lambda_r - \lambda_s) \int_D \omega_r M(\omega_s) dD = 0$.

Si $\lambda_r \neq \lambda_s \implies \int_D \omega_r M(\omega_s) dD = 0$. (I - 22)

ce qui est une condition d'orthogonalité généralisée et les fonctions ω_r et ω_s sont dites être orthogonales au sens généralisé.

De même nous avons : $\int_D \omega_r L(\omega_s) dD = 0 \text{ . } (\lambda_r \neq \lambda_s)$

Si le système est auto-adjoint, nous saurons que pour des valeurs propres distinctes, les fonctions propres correspondantes sont orthogonales. Dans le cas de valeurs propres multiples, les fonctions propres ne sont pas forcément orthogonales l'une à l'autre, mais on peut les orthogonaliser en choisissant comme fonctions propres des combinaisons linéaires d'entre elles.

On peut normaliser les fonctions propres en écrivant :

$$\int_D \omega_r M(\omega_r) dD = 1 \text{ . } (I - 23)$$

En combinant (I- 22) et (I - 23) on déduit que :

$$\int_D \omega_r M(\omega_s) dD = \delta_{rs} \text{ . } (I - 24)$$

(δ_{rs} symbole de Kronecker).

Les modes ω_r satisfaisant à (I - 24) constituent une suite complète de modes orthonormés. Une extension peut-être donnée sous forme du théorème :

Toute fonction ω vérifiant les conditions aux limites homogènes d'un système, et pour lequel $L(\omega)$ est continu, peut être représentée par un développement uniformément et absolument convergent, de la forme :

$$\omega = \sum_{r=1}^{\infty} C_r \omega_r \text{ . } (I - 25)$$

où les C_r sont donnés par : $C_r = \int_D \omega M(\omega_r) dD \text{ . } (I - 26)$
 $r = 1, 2, \dots$

CHAPITRE II

POLYNÔMES ORTHOGONAUX, PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

.

II - LES POLYNOMES ORTHOGONAUX

II - A - LES POLYNOMES ORTHOGONAUX - DEFINITION

II - A - 1 Rappels [21]

Il est intéressant de signaler que les polynômes orthogonaux sont présentés dans beaucoup d'ouvrages sous des manières bien distinctes :

- Soit en tant que solutions d'équations différentielles du second ordre,
- Soit comme développements d'une fonction, dite "génératrice",
- Soit encore à partir des propriétés directes des fonctions orthogonales.

Nous nous intéresserons plus particulièrement au cas où les polynômes sont solutions d'équations différentielles du second ordre.

Pour revenir au § I - D - 2 , il est utile de rappeler que l'on peut montrer que toute équation différentielle du second ordre peut se mettre sous la forme auto-adjointe en multipliant ses deux membres par une fonction $Z(\omega)$ appropriée [21] .

Ceci est important car l'on a vu que les solutions d'un problème du type auto-adjoint déterminent une suite complète orthonormée.

II - A - 2 Généralisation

On introduit l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre de la forme :

$$\frac{d}{dx} \left[A(x) \frac{du}{dx} \right] + B(x) u = - \lambda p(x) u . \quad (II - 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ainsi que les conditions aux limites linéaires } \alpha u(a) + \beta u'(a) = 0 \\ \gamma u(b) + \delta u'(b) = 0 \end{array} \right\} \quad (II - 2)$$

Où λ est la valeur propre, u la fonction propre et $p(x)$ un facteur de pondération.

Nous nous trouvons alors dans le cas d'un problème de recherche de valeurs propres (ou de fonctions propres), qui peut se ramener [II-A-1] à un problème auto-adjoint de détermination de valeurs propres.

L'on peut donc directement affirmer :

- 1°) qu'il existera une suite (infinie) de valeurs propres réelles,
- 2°) qu'à chaque valeur propre correspondra une seule fonction propre, et
- 3°) que l'ensemble de ces fonctions propres $\{ u_n(x) \}$ formera une suite complète et orthonormée.

Or, l'on sait [I-B-1] que si n vecteurs non nuls sont deux à deux orthogonaux, ceux-ci sont linéairement indépendants et constituent par suite une base.

L'on peut conclure, en disant que l'ensemble des fonctions propres $\{ u_n(x) \}$ formera une base complète, d'où toute fonction (définie dans H) pourra être décomposée suivant les vecteurs de cette base.

Or, l'on montre qu'un certain nombre de polynômes ($P_n(x)$) sont solutions de l'équation différentielle (II-1).

Ces polynômes forment donc une suite complète et orthonormée et par suite une base complète.

Il sera donc possible de développer toute fonction $f(x)$ de H suivant cette base :

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) .} \quad (II-3)$$

Suivant la valeur des coefficients $A(x)$, $B(x)$, $p(x)$, λ de l'équation (II-1), on retrouve toutes les formes classiques d'équations différentielles, qui admettent comme solutions les différents polynômes orthogonaux connus.

Exemples :

$$(1 - x^2) u'' - 2 x u' + n(n + 1)u = 0 \quad (\text{Legendre})$$

avec $\lambda = n(n + 1)$

$$x u'' + u' + (k^2 x - n^2/x)u = 0 \quad (\text{Bessel})$$

$$u'' + (p + 16 q \cos 2x)u = 0 \quad (\text{Mathieu})$$

etc ...

Remarque :

Nous avons vu (§ I-D-3) que la solution d'un système différentiel linéaire, peut être représentée par un développement en série de ses valeurs propres :

$$u = \sum c_n u_n(x) .$$

Or les polynômes orthogonaux peuvent se déterminer à partir du développement de certaines fonctions génératrices.

Ces fonctions sont développables suivant les puissances d'un paramètre t , et les coefficients de ces développements sont précisément les polynômes recherchés :

$$\phi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x) . \quad (II - 4)$$

$\phi(t, x)$ fonction génératrice , $P_n(x)$: polynômes orthogonaux
solution de (II - 1)

Exemples :

Le développement de la fonction : $(1 - 2tx + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) t^n$ fournit les coefficients P_n ou polynômes de Legendre.

De même $(1 - 2tx + t^2)^{-\gamma} = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma^n C_n^\gamma(x)$ définit les polynômes de Gegenbauer ;

$$\frac{(1 - tx)}{1 - 2tx + t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x) t^n \quad (t < 1) \text{ définit les polynômes}$$

de Tchebycheff de première espèce ;

$$\frac{1}{t^2 - 2tx + 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} u_n(x) t^{n-1} \text{ donne ceux de Tchebycheff}$$

de deuxième espèce.

II - B - CALCUL DES POLYNÔMES ORTHOGONAUX

II - B - 1 Formule de Rodriguez

On remarque d'après ce qu'il vient d'être dit, que tous les

polynômes orthogonaux, s'expriment en fonctions de certaines conditions aux limites, ainsi que du facteur poids. Rodriguez a donné l'expression des différents polynômes à partir des conditions précédentes :

$$P_n(z) = \frac{1}{\mu^n} \frac{1}{p(z)} \frac{d^n}{dz^n} \left[p(z) H^n(z) \right]. \quad (\text{II} - 5)$$

$p(z)$: facteur poids

$$H(z) = (b - z)(z - a) \quad \text{si } z \in [a, b],$$

$$H(z) = z - a \quad \text{si } z \in [a, \infty[,$$

$$H(z) = 1 \quad \text{si } z \in]-\infty, +\infty[.$$

- Polynômes de Legendre =====

$$p(z) = 1 \quad z \in [-1, +1]$$

$$P_n(z) = \frac{1}{\mu^n} \frac{d^n}{dz^n} \left[(1 - z^2)^n \right] ; \quad \frac{1}{\mu^n} = \frac{1}{(-2)^n n!} .$$

- Polynômes de Tchebycheff =====

- première espèce :

$$p(z) = (1 - z^2)^{-1/2}, \quad z \in [-1, +1] ;$$

- deuxième espèce :

$$p(z) = (1 - z^2)^{1/2}, \quad z \in [-1, +1] ,$$

- Polynômes de Gegenbauer : =====

$$p(z) = (1 - z^2)^{\lambda-1/2}, \quad z \in [-1, +1] ,$$

($\lambda > -1/2$).

II - B - 2 Généralisation de la formule de Rodriguez [7]

L'on remarque dans la formule de Rodriguez que le facteur poids varie suivant le type du polynôme.

Il est possible de donner une variante de cette formule en laissant le facteur poids constant pour tous les polynômes.

$$\text{Soit : } P_n^{(\lambda)}(z) = A_n^{(\lambda)} (1 - z^2)^{-\lambda + 1/2} \left(\frac{d}{dz} \right)^n (1 - z^2)^{n+\lambda - 1/2} . \quad (\text{II} - 6)$$

=====

En faisant varier λ on retrouve les différents types de polynômes précédents

$A_n^{(\lambda)}$ étant le facteur de normalisation du polynôme

$$\left. \begin{aligned} A_n^{(\lambda)} &= \frac{(-1)^n \Gamma(\lambda + 1/2) \Gamma(n + 2\lambda)}{2^n n! \Gamma(2\lambda) \Gamma(n + \lambda + 1/2)} \\ A_n^{(0)} &= (-1)^n \frac{2^n n!}{(2n)!} ; \\ n &\geq 1 \\ \Gamma(\lambda) &: \text{fonction Eulérienne de 2ème espèce.} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II} - 7)$$

Exemples :

$\lambda = 1/2 \rightarrow$ polynômes Legendre

$\lambda = 0 \rightarrow$ polynômes de Tchebycheff première espèce

$\lambda = -1 \rightarrow$ polynômes de Tchebycheff deuxième espèce

Dans tout ce qui suivra nous n'utiliserons que les polynômes de Tchebycheff de première espèce, ce qui revient à prendre $\lambda = 0$ dans les formules précédentes.

II - C - RAPPELS SUR LE DEVELOPPEMENT EN SERIE D'UNE FONCTION QUELCONQUE SUIVANT LES POLYNÔMES ORTHOGONAUX [7]

$$\text{Soit le développement } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \quad (\text{II} - 8)$$

On a vu que dans l'expression d'une fonction $f(x)$ par une série de fonctions orthogonales, les quantités a_n représentent les coefficients de Fourier de $f(x)$ relativement à la suite des fonctions orthonormées $P_n(x)$ cf [§ I - C]

Dans le cas de l'utilisation des polynômes de Tchebycheff nous avons :

$$a_n = \frac{\int_{-1}^{+1} f(u) P_n(u) (1 - u^2)^{-1/2} du}{\int_{-1}^{+1} [P_n(u)]^2 (1 - u^2)^{-1/2} du} \quad (\text{II} - 9)$$

$$u \in [-1, +1] \quad ; \quad x \in [-A, +A]$$

$(1 - u^2)^{-1/2}$ étant le facteur poids.

II - D - COMPLEMENTS A L'ETUDE DES POLYNÔMES DE GEGENBAUER [5] [9]

On rappelle que l'on avait défini par $P_n(x)$, le polynôme de Legendre d'ordre n . Ces polynômes admettant comme fonction génératrice $(1 - 2xt + t^2)^{-1/2}$ (cf. § II-A-2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2}.$$

En généralisant la forme de la fonction génératrice précédente sous la forme $(1 - 2xt + t^2)^{-\gamma}$, on trouve un développement sous forme de polynôme : $(1 - 2xt + t^2)^{-\gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\gamma} t^n$

γ nombre rationnel positif.

Les polynômes (de Gegenbauer) C_n^γ étant dits polynômes électrosphériques [9].

Ils satisfont à plusieurs propriétés :

$$\left. \begin{aligned} & \cdot (n+1) C_{n+1}^\gamma(x) - 2(n+\gamma)x C_n^\gamma(x) + (n-1+2\gamma)C_{n-1}^\gamma(x) = 0 : \text{relation de récurrence} \\ & \cdot (1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - (2\gamma + 1)x \frac{dy}{dx} + n(n+2\gamma)y = 0 : \text{équation différentielle} \\ & \cdot \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\gamma-1/2} C_m^\gamma(x) C_n^\gamma(x) dx = 0 : \text{relation d'orthogonalité} \\ & \hspace{15em} (m \neq n) \end{aligned} \right\} \text{(II-10)}$$

Nous nous intéresserons au cas plus particulier des polynômes $C_n^1(x)$.

Le développement de la fonction génératrice donne :

$$C_0^1(x) = 1, C_1^1(x) = 2x \text{ etc ...}$$

et la relation de récurrence s'écrit : $C_{n+1}^1(x) = 2x C_n^1(x) + C_{n-1}^1(x) = 0$.

On remarquera que les polynômes ont un degré égal à leur indice inférieur et que leurs termes sont tous de même parité.

On notera pour $|x| \leq 1$ $x = \cos \theta$

$$\text{d'où } C_n^1(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} \quad \text{(II - 11)}$$

d'où l'on déduit que les zéros du polynôme sont donnés par :

$$\theta = \frac{k\pi}{n+1} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad \text{(II - 12)}$$

et que les valeurs correspondantes de x appartiennent à l'intervalle $[-1, +1]$.

$$\text{Pour } |x| > 1 \text{ on pose } x = \cosh \theta \implies C_n^1(\cosh \theta) = \frac{\text{sh}(n+1)\theta}{\text{sh} \theta} \quad \text{(II - 13)}$$

On peut donner des polynômes $C_n^1(x)$, une expression sous forme de déterminant (voir annexe)

On écrit à partir de la relation de récurrence, toutes les formes successives :

$$\left. \begin{array}{l} C_n^1 - 2x C_{n-1}^1 + C_{n-2}^1 = 0 \\ C_{n-1}^1 - 2x C_{n-2}^1 + C_{n-3}^1 = 0 \\ \hline C_2^1 - 2x C_1^1 = -C_0^2 = -1 \\ C_1^1 = 2x \text{ et } C_0^1 = x \end{array} \right\} \text{ (II - 14) avec : } C_1^1(x) = 0$$

On a donc un système d'équations algébriques aux inconnues $C_1^1(x) \dots C_n^1(x)$ donnant une matrice $[n, n]$ de la forme :

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1, -2x & , & 1 & , & 0 & , & \dots & 0 & , & \dots & , & 0 \\ 0, 1 & , & -2x & , & 1 & , & \dots & 0 & , & \dots & , & 0 \\ \hline 0, \dots 0 & , & \dots 0 & , & \dots 0 & , & \dots \dots \dots & -1 & , & \dots \dots \dots & , & -2x \\ 0, \dots 0 & , & \dots 0 & , & \dots 0 & , & \dots 0 & , & \dots \dots \dots & , & 1 \end{array} \right] \quad \text{(II - 15)}$$

(matrice triangulaire de déterminant égal à 1)

$$\text{d'où l'on tire } C_n^1 = \left| \begin{array}{cccc} 2x, & 1, & 0, & 0, \dots \dots \dots \\ 1, & +2x, & 0, & 0, & 0, & \dots \\ \hline 0, & 0, & 0, & 0, & 0 & \dots \dots \dots, & 0, & 2x, & 1 \\ 0, & \dots \dots 0, & \dots \dots \dots 0, & & 0, & 0, & 2x \end{array} \right| \quad \text{(II - 16)}$$

Nota :

On trouvera dans l'annexe quelques exemples d'application des polynômes orthogonaux, à la résolution de problèmes concrets de la Physique Mathématique portant soit sur des équations aux dérivées partielles, soit sur des systèmes différentiels.

CHAPITRE III

PRINCIPE DE L'UTILISATION DES POLYNÔMES ORTHOGONAUX

A LA RESOLUTION D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES NON-LINEAIRES

Les travaux de certains auteurs [7] , [12] , [14] (cf [3]) avaient trait aux équations différentielles non linéaires, et utilisaient un développement en série de fonctions orthogonales.

Les méthodes consistaient, après avoir effectué ce développement, à ne conserver dans celui-ci que le terme linéaire, donc à remplacer l'équation différentielle non linéaire, par une équation différentielle linéaire, dont la solution est aisée à déterminer.

La comparaison des résultats, avec les solutions d'équations non linéaires, mais intégrables, montre que le procédé est relativement satisfaisant même pour des valeurs importantes du paramètre de non linéarité.

Nous nous proposons dans ce qui suit, de rappeler cette méthode afin de comparer ultérieurement ces résultats à ceux auxquels conduit le présent travail.

III - A - FORME APPROCHÉE DE LA PERIODE D'UNE EQUATION

DIFFERENTIELLE DU SECOND ORDRE NON LINEAIRE

$$\text{DE LA FORME : } \frac{d^2 x}{dt^2} + f(x) = 0 . \quad (\text{III} - 1) \quad [7]$$

On impose $f(x)$ impaire $x \in [-A, A]$.

Le développement de $f(x)$ en première approximation nous donne :

$$f(x) = a_1^{(\lambda)} P_1^{(\lambda)}(x/A) . \quad (\text{III} - 2)$$

$x = A x^*$

A : amplitude finale de la solution x

x^* : partie oscillante de x .

On trouve ainsi : $a_1^{(\lambda)} = \frac{2 \Gamma(\lambda + 2) S}{\Gamma(\lambda + 1/2) \Gamma(1/2)}$.

$\Gamma(\lambda + n)$ fonction Eulérienne de deuxième espèce

$$S = \int_0^1 f(Ax) x (1 - x^2)^{\lambda-1/2} dx.$$

En utilisant les polynômes de Tchebycheff de première espèce ($\lambda = 0$), (III-1) devient : $\ddot{x} + a_1 P_1(x/A) = 0$.

$$\text{avec } P_1(x/A) = x/A \implies \ddot{x} + \frac{a_1}{A} x = 0.$$

D'où la période approchée en première approximation :

$$T = 2\pi \left[\frac{a_1}{A} \right]^{-1/2} \implies T = 2\pi^{5/4} \left[\frac{\pi^{1/2} A}{4 S} \right]^{1/2}. \quad (\text{III} - 3)$$

III - B - ETUDE DE L'EQUATION (III-1) avec $f(x) = ax + bx^3$

Dans ce cas $f(x) = a_1 P_1(x/A) + \dots$

$$\text{où } f(x) \text{ (en première approximation)} = \left[a + \frac{3 b A^2}{4} \right] x. \quad (\text{III} - 4)$$

L'équation (III - 1) : $\ddot{x} + ax + b x^3 = 0$, devient :

$$\ddot{x} + \left[a + \frac{3 b A^2}{4} \right] x = 0. \quad (\text{III} - 5)$$

$$\text{avec } \omega^2 = \left[a + \frac{3 b A^2}{4} \right], \text{ d'où } T = 2\pi \left[a + \frac{3 b A^2}{4} \right]^{-1/2},$$

$$\text{où } \frac{T}{T'} = \frac{2\pi}{\left[a + \frac{3b A^2}{4} \right]^{1/2}} \cdot \frac{a^{1/2}}{2\pi} = \frac{1}{\left[1 + \frac{3b A^2}{4 a} \right]^{1/2}}. \quad (\text{III-6})$$

$$\text{En posant : } T' = \frac{2\pi}{b = 0 \quad a^{1/2}}.$$

Pour la comparaison on se rapporte aux calculs des ressorts dits "durs" ou "mous".

$$\text{Soit l'équation } \ddot{x} + \omega_0^2 x + h^2 \omega_0^2 x^3 = 0 .$$

$$\text{Dans notre cas } \omega_0^2 = a \quad \text{et} \quad h^2 \omega_0^2 = b .$$

$$\text{a) } \underline{\text{Ressort dur}} : \ddot{x} + \omega_0^2 x + h^2 \omega_0^2 x^3 = 0 .$$

$$T_{\text{exact}} = \frac{4 K(k)}{\left[a + b A^2 \right]^{1/2}} , \quad \text{avec} \quad k^2 = \left[2 \left(1 + \frac{1}{6 A^2} \right) \right]^{-1} .$$

$K(k)$: intégrale elliptique de première espèce.

$$\text{On pose } \gamma = \frac{b A^2}{a} \implies k^2 = \frac{\gamma}{2(1 + \gamma)} .$$

$$\text{d'où } \frac{T_{\text{exact}}}{T'} = \frac{2 K(k)}{\pi (1 + \gamma)^{1/2}} . \quad (\text{III-7})$$

$$\text{b) } \underline{\text{Ressort mou}} : \ddot{x} + \omega_0^2 x - h^2 \omega_0^2 x^3 = 0 .$$

$$\frac{T_e}{T'} = \frac{2(1 + k^2)^{1/2}}{\pi} K(k) , \quad \text{avec} \quad k^2 = \frac{-\gamma}{2 + \gamma} .$$

(III-8)

III - C - ETUDE DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 \sin x = 0 . \quad (\text{III - 9})$$

α) Première approximation

$$\sin x = a_1 P_1(x/A) .$$

avec :

$$a_1 = \frac{\int_{-A}^{+A} \sin x (1 - x^2/A^2)^{-1/2} x/A dx}{\int_{-A}^{+A} \left[\frac{x}{A} \right]^2 (1 - x^2/A^2)^{-1/2} dx} .$$

En posant $x = \cos \theta$ on trouve : $a_1 = 2 J_1(A)$.

$$\text{d'où } \sin x = \frac{2 J_1(A)}{A} x . \quad (\text{III} - 10)$$

En remplaçant (III-10) dans (III-9), la nouvelle pulsation s'écrit :

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 \frac{2 J_1(A)}{A} ;$$

$$\text{d'où la période : } T = \frac{2 \pi}{\omega_1} = T_0 \left[\frac{A}{2 J_1(A)} \right]^{1/2} \quad (\text{III-11})$$

$$\text{En posant } T_0 = \frac{2 \pi}{\omega_0} .$$

En développant $J_1(A)$ il vient :

$$\frac{T(A)}{T_0} = 1 + \frac{A^2}{16} + \frac{10 A^4}{12 \cdot 16^2} + \dots \quad (\text{III} - 12)$$

La solution exacte, ainsi que les calculs effectués par la méthode des Perturbations [6], ainsi que par la méthode de la "Moyenne" donnent :

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{A^2}{16} + \frac{11 A^4}{12 \cdot 16^2} + \dots \quad (\text{III} - 13)$$

β) Deuxième approximation

On a alors $f(x) = a_1 P_1(x/A) + a_3 P_3(x/A)$.

Tous calculs faits on trouve $a_3 P_3(x/A)$:

$$a_3 P_3(x/A) = \frac{6 J_3(A)}{A} x - \frac{8 J_3(A)}{A^3} x^3 .$$

d'où $\sin x$ (en deuxième approximation) =

$$\frac{2}{A} \left[J_1(A) + 3 J_3(A) \right] x - \frac{8 J_3(A)}{A^3} x^3 . \quad (\text{III} - 14)$$

de la même forme que $\ddot{x} + ax - b x^3 = 0$. (ressort mou)

La période approchée est donc donnée par :

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2}{\pi} (1 + k^2)^{1/2} K(k) , \text{ avec}$$

$$k^2 = - \frac{\gamma}{2 + \gamma} = \frac{2 J_3(A)}{J_1(A) + J_3(A)} , \text{ d'où}$$

$$T = \frac{2 \pi}{\omega_0} \left[2 \frac{(J_1(A) + 3 J_3(A))}{A} \right]^{-1/2} . \quad (\text{III} - 15)$$

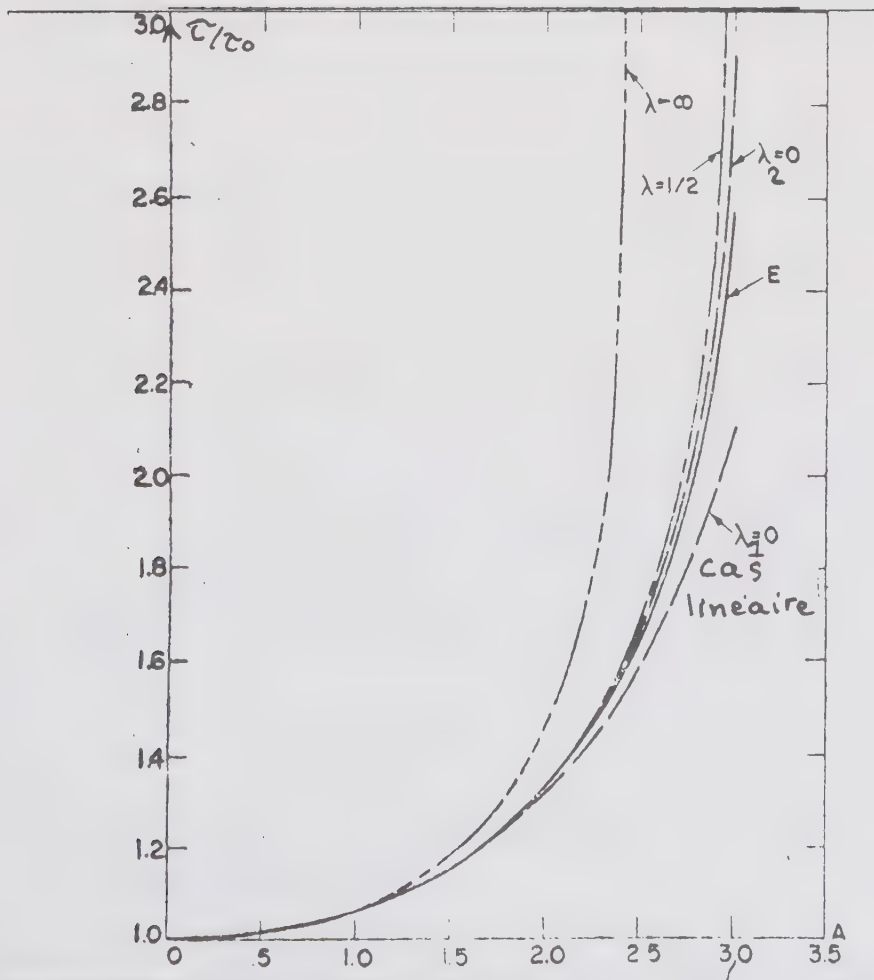


Fig - Etude de l'équation $\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0$ en deuxième approximation.

$\lambda_1 = 0$ correspond aux polynômes de Tchebycheff (première espèce) dans le cas de la première approximation.

$\lambda_2 = 0$ correspond aux polynômes de Tchebycheff dans le cas de la deuxième approximation.

$\lambda = 1/2 \rightarrow$ polynômes de Legendre.

$\lambda \rightarrow \infty$ correspond au développement de $\sin x$ en série de Taylor.

E correspond à la solution exacte.

Conclusion

A partir de ces quelques exemples on peut constater que les valeurs exactes et approchées restent voisines même pour des valeurs importantes de l'amplitude A.

Mais l'un des principaux défaut, est de donner la solution sous forme très incomplète, puisque nous ne pourrions connaître de la solution x, que le premier harmonique.

III - D - ETUDE DES OSCILLATIONS ASYMETRIQUES . [12]

Les cas étudiés jusqu'à présent, consistaient en des fonctions impaires, que l'on développait en série de polynômes orthogonaux, en se contentant de la première approximation, c'est-à-dire à approcher la fonction considérée par une droite :

$$f(x) = a_1 P_1(x/A).$$

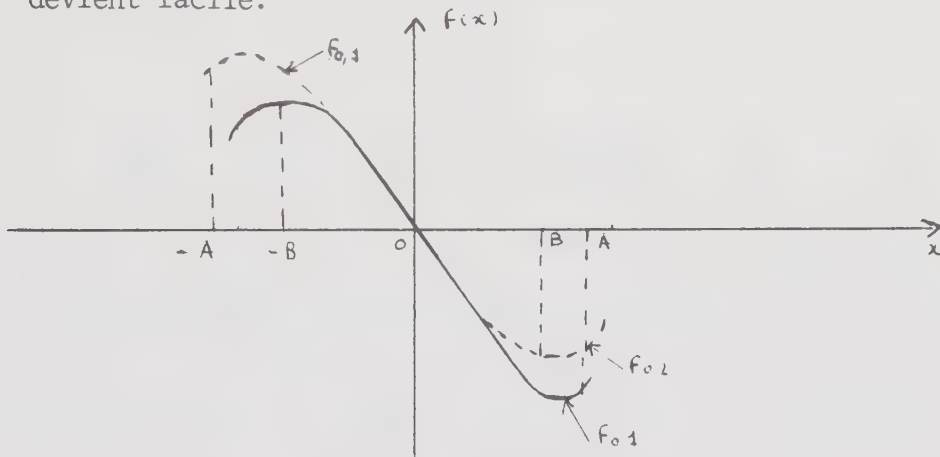
Ceci n'est plus possible si la fonction est paire puisque son développement s'écrit :

$$f(x) = a_0 P_0(x/A) + a_2 P_2(x/A) + \dots + a_{2n} P_{2n}(x/A)$$

qui exclut les termes linéaires en $P_1(x/A)$.

L'intérêt de la première approximation étant de remplacer une fonction $f(x)$ quelconque d'ordre n par un polynôme d'ordre 1 (donc linéaire en x), il était nécessaire de trouver un moyen de linéariser les fonctions paires.

L'idée (cf [12]) consiste à partir d'un oscillateur asymétrique d'introduire deux oscillateurs fictifs faisant intervenir chacun une fonction $f(x)$ impaire et à partir desquels l'approximation par les polynômes orthogonaux (sur un intervalle donné) devient facile.



Trait plein : oscillateur asymétrique

Traits pointillés : construction des oscillateurs fictifs (symétriques)

Soit une fonction $G(x)$ asymétrique, la première approximation donne: $G(x) = g_1 P_1(x)$.

Pour représenter $G(x)$ on introduit deux fonctions impaires, $f_{0,1}(x)$ et $f_{0,2}(x)$ telles que :

$$G(x) = \begin{cases} f_{0,1}(x) & \text{sur } [-A, A] \\ f_{0,2}(x) & \text{sur } [-B, B] \end{cases}$$

Soit l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \left[x + \epsilon G(x) \right] = 0 \quad (\text{III} - 16)$$

En première approximation :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 \left[1 + \epsilon \frac{g_1}{A} \right] x = 0 . \quad (\text{III} - 17)$$

et l'on trouve pour la valeur de la pulsation en première approximation :

$$\left. \begin{aligned} \omega_A^2 &= \omega_0^2 \left[1 - \frac{4\epsilon}{\pi A} \int_0^1 f_0(-Ax) (1-x^2)^{-1/2} x dx \right] , \\ \omega_B^2 &= \omega_0^2 \left[1 - \frac{4\epsilon}{\pi B} \int_0^1 f_0(Bx) (1-x^2)^{-1/2} x dx \right] . \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-18})$$

La période approchée étant donnée par :

$$T = \frac{\pi}{\omega_A} + \frac{\pi}{\omega_B} \quad (\text{III} - 19)$$

Soit la demi-somme des deux périodes approchées de deux oscillateurs, construits à partir de la fonction $G(x)$.

III - E - ETUDE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES NON LINEAIRES

FORCEES DU TYPE : $\ddot{x} + g(\dot{x}) + f(x) = F_0 \sin pt + F_1 . \quad (\text{III-20})$

On suppose $f(x)$ définie sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ de x

On suppose $g(\dot{x})$ définie sur un intervalle $[\delta, \gamma]$ de x

Les polynômes orthogonaux étant définis sur l'intervalle $[-1, +1]$, il est nécessaire d'effectuer quelques transformations.

On posera :

$$x_C = \frac{\beta + \alpha}{2} \rightarrow \text{déplacement moyen ,}$$

$$A = \frac{\beta - \alpha}{2} \rightarrow \text{amplitude du déplacement moyen,}$$

$$x' = \frac{x - x_c}{A} \rightarrow \text{translation de la variable } x.$$

On notera de la même façon : $v_c = \frac{\delta + \gamma}{2} \rightarrow$ vitesse moyenne,

$$\text{et : } V = \frac{\delta - \gamma}{2}.$$

$$x' \in [-A, +A] \text{ et } P_n(x') \text{ a comme facteur poids } \left[1 - \frac{(x - x_c)^2}{A^2}\right]^{-1/2}.$$

En première approximation on obtient :

$$f^*(x') = a_0 P_0 \frac{(x - x_c)}{A} + a_1 P_1 \frac{(x - x_c)}{A}. \quad (\text{III} - 22)$$

[aucune hypothèse n'ayant été effectuée sur la parité de $f(x)$]

$$\text{avec } a_n = \frac{\int_{-1}^{+1} f(Ax + x_c) P_n(x) (1 - x^2)^{-1/2} dx}{\int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2 (1 - x^2)^{-1/2} dx}.$$

Si l'on considère l'équation différentielle (III-20), on développe en première approximation en série de polynômes orthogonaux $f(x)$ et $g(\dot{x})$

Soit :

$$f(x') = a_0 P_0(x') + a_1 P_1(x'), \quad (\text{III-23})$$

$$P_0(x') = 1 \quad a_0 = \text{constante},$$

$$a_1 P_1(x') = a_1 \frac{(x - x_c)}{A}, \text{ et l'on pose : } \omega_*^2 = \frac{a_1}{A}.$$

$$\text{De même } g^*(\dot{x}) = \bar{a}_0 P_0(\dot{x}'') + \bar{a}_1 P_1(\dot{x}''), \text{ avec } \dot{x}'' = \frac{\dot{x} - v_c}{V}.$$

$$\overline{a_1} P_1(\dot{x}'') = \overline{a_1} \frac{(\dot{x} - v_c)}{V} \quad \text{et l'on pose} \quad c_* = \frac{\overline{a_1}}{V}$$

(la notation $\overline{a_0}$, $\overline{a_1}$ précise qu'il s'agit de développement suivant $\dot{x}$).

On rapporte ces différents résultats dans (III-20)

$$\ddot{x} + c_* \dot{x} + \omega_*^2 x = F_0 \sin pt + \left[F_1 + \omega_*^2 x_c - a_0 + c_* v_c - \overline{a_0} \right]. \quad (\text{III-24})$$

Nous avons à présent une équation différentielle linéaire dont on connaît la solution :

$$x = F_0 \left[(\omega_*^2 - p^2)^2 + (c_* p)^2 \right]^{-1/2} \sin (pt + \phi) + \left[\frac{F_1 + \omega_*^2 x_c - a_0 + c_* v_c - \overline{a_0}}{\omega_*} \right]. \quad (\text{III-25})$$

$$\text{avec } \phi = \text{Arc tg } \frac{c_* p}{\omega_*^2 - p^2}.$$

x_c et v_c étant les valeurs des déplacements et vitesse moyenne

$$x_c = F_0 \left[(\omega_*^2 - p^2)^2 + (c_* p)^2 \right]^{-1/2} \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin (pt + \phi) dt + \frac{F_1 + \omega_*^2 x_c - a_0 + c_* v_c - a_0}{\omega_*},$$

$$\text{où : } x_c = \frac{F_1 + \omega_*^2 x_c - a_0 + c_* v_c - a_0}{\omega_*}. \quad (\text{III - 26})$$

$$\text{de même } \dot{x} = F_0 \left[(\omega_*^2 - p^2)^2 + (c_* p)^2 \right]^{-1/2} p \cos (pt + \phi),$$

$$\text{d'où } \underline{v_c = 0}. \quad (\text{III - 27})$$

On peut tirer aussi l'amplitude du déplacement moyen : A

$$A = F_0 \left[(\omega_*^2 - p^2)^2 + (c_* p)^2 \right]^{-1/2}. \quad (\text{III - 28})$$

$$\text{de même } V = p F_0 \left[(\omega_*^2 - p^2)^2 + (c_* p)^2 \right]^{-1/2} = p A \quad (\text{III - 29})$$

Enfin on peut remarquer que ,

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= a_0 + \overline{a_0} \quad , \\ F_0^2 &= A^2 \left[(\omega_*^2 - p^2)^2 + (c_* p)^2 \right] \quad . \end{aligned} \right\} \quad (\text{III} - 30)$$

Conclusion

L'on peut constater [3] que l'approximation par cette méthode, d'une équation différentielle non linéaire à un seul degré de liberté donne des résultats équivalents, aux techniques classiques utilisées (méthode de Kryloff - Bogoliuboff etc ...) ou des méthodes graphiques, dans le cas de perturbations faibles, mais lorsque celles-ci deviennent importantes, la méthode présentée dans ce chapitre donne des résultats meilleurs que les techniques standards.

Mais cette méthode présente un défaut important c'est de donner la solution sous forme incomplète (premier harmonique) de plus lorsque la forme de la fonction $f(x, \dot{x})$ devient plus compliquée (ex : équation de Van der Pol), elle n'est plus applicable.

CHAPITRE IV

EXTENSION DE LA METHODE PRECEDENTE

Nous avons vu dans le chapitre précédent un procédé permettant de linéariser une équation différentielle non linéaire, donc d'en trouver sa solution, même pour des valeurs importantes de la non linéarité.

Il est évident que cette méthode ne peut présenter qu'une première approche du problème, en particulier pour la forme générale de la solution, comme pour la recherche des différents paramètres : amplitude, période, etc ...

Nous nous proposons, dans ce chapitre de présenter une méthode analytique, basée elle aussi sur un développement de la fonction perturbatrice en une série de polynômes orthogonaux, celle-ci permettant de donner la solution périodique sous sa forme la plus générale (développement en série de Fourier), à l'ordre d'approximation que l'on désire.

De plus, cette méthode se propose d'être applicable au cas de non linéarité importante, c'est-à-dire dans le domaine où les méthodes de perturbations classiques ainsi que celles utilisées pour les oscillations de relaxation ne sont plus ou pas encore acceptables.

D'autre part, nous signalons que cette méthode s'applique et peut s'étendre facilement aux cas des équations différentielles non linéaires d'ordre quelconque, ainsi qu'aux cas des équations, aux dérivées partielles, type propagation ;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu f(x, \frac{\partial x}{\partial t}) .$$

- Dans un premier temps, sera présentée une méthode de perturbation classique, la "linéarisation équivalente", qui sera utilisée par la suite.

- Puis on donnera une généralisation de la méthode, pour terminer dans une deuxième partie par une série d'exemples, chacun d'entre eux ayant été traités par différents procédés. Cela permettant de comparer nos résultats à ceux obtenus antérieurement.

QUELQUES RAPPELS SUR LA LINEARISATION EQUIVALENTE POUR LES
OSCILLATEURS A UN DEGRE DE LIBERTE.

La méthode de linéarisation équivalente, n'est, comme plusieurs autres, qu'une variante de la méthode de la moyenne.

Cependant dans le cas du régime périodique, qui nous intéressera par la suite, elle conduit à des calculs plus réduits et permet mieux de donner une interprétation physique.

La linéarisation équivalente consiste comme son nom l'indique, à remplacer l'équation de départ (non - linéaire) par une équation apparemment ou réellement linéaire.

Dans ce qui suit μ est un facteur positif dosant l'intensité des forces perturbatrices.

IV - A - SYSTEMES DE LA FORME : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu f(x, \dot{x}, t)$. (IV - 1)

IV - A - 1 Recherche de la solution générale

On effectue le changement de variable : $x = y + \mu G(y, \dot{y}, t)$ (IV-2)

(G étant périodique par rapport à t), pour obtenir :

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \mu F(y, \dot{y}, t) . \quad (\text{IV} - 3)$$

On vérifie facilement que pour $\mu = 0 \Rightarrow \ddot{y} = -\omega_0^2 y$. On a :

$$\frac{d^2 G}{dt^2} = \left[\frac{d^2 G}{dt^2} \right]_{\ddot{y} = -\omega_0^2 y} + \mu \left[2 \frac{\partial^2 G}{\partial t \partial \dot{y}} F + 2 \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial \dot{y}} \dot{y} F + \frac{\partial G}{\partial y} F + \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{y}^2} (-2\omega_0^2 y + \mu F^2) + \frac{\partial G}{\partial \dot{y}} \dot{F} \right] . \quad (\text{IV} - 4)$$

d'où :

$$\left[\frac{d^2 G}{dt^2} \right]_{y_0} + \omega_0^2 G = f(y + \mu G, \dot{y} + \mu \dot{G}, t) - F - \mu \left[\frac{2\partial^2 G}{\partial t \partial \dot{y}} F + \frac{2\partial^2 G}{\partial y \partial \dot{y}} \dot{y} F + \frac{\partial G}{\partial y} F + \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{y}^2} (-2\omega_0^2 y F + \mu F^2) + \frac{\partial G}{\partial \dot{y}} \dot{F} \right] . \quad (\text{IV-5})$$

y_0 solution de $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$.

Pour résoudre cette équation (IV-4) on remplace y et $\dot{y}$ par y_0 et $\dot{y}_0$, pour obtenir G , puis l'on reviendra aux fonctions initiales y et $\dot{y}$.

Pratiquement l'on opère comme suit :

$f(y + \mu G, \dot{y} + \mu \dot{G}, t)$ étant analytique et μ étant petit on peut développer f en une série de Taylor par rapport à $G, \dot{G}$ au voisinage de $y, \dot{y}$.

De même on développe F et G suivant les puissances de μ .

Le second nombre étant périodique de période $\frac{2\pi}{\omega_0}$, pour éviter lors de l'intégration les termes séculaires, l'on choisira F de telle manière qu'il représente les termes de premiers harmoniques, lorsque l'on remplace, après le développement en série de Taylor de f, y par $y_0, \dot{y}$ par $\dot{y}_0$.

(L'on obtient ainsi un développement de f en série de Fourier)

$F(y, \dot{y}, t)$ est donc linéaire en $y, \dot{y}$.

Les différents stades d'approximation s'établissent en identifiant les deux membres de l'équation (IV - 4) suivant les puissances de μ .

On aura donc suivant (IV - 4) :

$$F = f(y + \mu G, \dot{y} + \mu \dot{G}, t) - \mu \left[\frac{\partial G}{\partial y} F + \frac{2\partial^2 G}{\partial t \partial \dot{y}} + \frac{2\partial^2 G}{\partial y \partial \dot{y}} \dot{y} F + \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{y}^2} (-2\omega_0^2 y F + \mu F^2) + \frac{\partial G}{\partial \dot{y}} \dot{F} \right]. \quad (IV-6)$$

La notation $\bar{\Psi}$ précise que l'on limite la fonction Ψ à son premier harmonique

$\tilde{\Psi} = \Psi - \bar{\Psi}$. L'opérateur $\sim$ étant l'opérateur complémentaire.

D'où suivant les stades d'approximation :

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \overline{f(y_0, \dot{y}_0, t)} \quad , \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^2 G_1}{dt^2} \right)_{y_0} + \omega_0^2 G_1 = f(y_0, \dot{y}_0, t). \\ F_2 &= \overline{\frac{\partial f}{\partial y} G_1} + \overline{\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \dot{G}_1} - \left[\frac{\partial G_1}{\partial y} \overline{\ddot{f}} + \frac{2 \partial^2 G_1}{\partial t \partial \dot{y}} \overline{\dot{f}} + \frac{2 \partial^2 G_1}{\partial y \partial \dot{y}} \dot{y}_0 \cdot \overline{\dot{f}} \right. \\ &\quad \left. - 2 \omega_0^2 \frac{\partial^2 G_1}{\partial \dot{y}^2} y_0 \cdot \overline{\dot{f}} + \frac{\partial G_1}{\partial \dot{y}} \overline{\ddot{f}} \right] . \end{aligned} \right\} \quad (IV-7)$$

Exemple : oscillateur de Van der Pol

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu \omega_0 (1 - x^2) \dot{x} .$$

Appliquons la formule (IV-3) $y_0 = a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = a_0 \cos \psi$.

$$F_1 = - \omega_0^2 (1 - a_0^2 \cos^2 \psi) a_0 \sin \psi = - \omega_0^2 a_0 \sin \psi + \omega_0^2 \frac{a_0^3}{4} (\sin \psi + \sin 3\psi) ,$$

$$F_1 = \omega_0 (1 - \frac{a_0^2}{4}) (-a_0 \omega_0 \sin \psi) = \omega_0 (1 - \frac{a_0^2}{4}) \dot{y}_0 .$$

En remplaçant $\dot{y}_0$ par $\dot{y}$ on a encore :

$F_1 = \omega_0 (1 - \frac{a^2}{4}) \dot{y}$. Par ailleurs d'après (IV - 7) G_1 vérifie l'équation :

$$\left[\frac{d^2 G_1}{dt^2} \right]_{y_0} + \omega_0^2 G_1 = \omega_0^2 \frac{a_0^3}{4} \sin 3\psi \text{ d'où : } G_1 = - \frac{a_0^3}{32} \sin 3\psi ,$$

$$\text{soit encore : } G_1 = \frac{a^2}{32} \frac{3}{\omega_0} \dot{y}_0 - \frac{4}{32 \omega_0^2} \dot{y}_0^3 .$$

Pour le calcul en deuxième approximation, G ne dépendant pas explicitement de t et uniquement de $\dot{y}$ on a :

$$\frac{\partial G_1}{\partial t \partial \dot{y}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial G_1}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial G_1}{\partial \dot{y}} = \frac{3 a^2}{32 \omega_0} - \frac{3}{8 \omega_0^3} \dot{y}^2 ,$$

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial \dot{y}^2} = - \frac{2}{3 \omega_0^3} \dot{y} \quad ; \quad \frac{\partial^2 G_1}{\partial y \partial \dot{y}} = 0 \quad ; \quad \ddot{F}_1 = \omega_0 (1 - \frac{a^2}{4}) \ddot{y} = - \omega_0^3 (1 - \frac{a^2}{4}) y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = - 2 \omega_0 y \dot{y} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \omega_0 (1 - y^2) .$$

$$d'où \quad F_2 = 2\omega_0^2 a^2 \sin \psi \cos \psi G_1 + \omega_0 (1 - a^2 \cos^2 \psi) \dot{y}_1$$

$$- 2\omega_0^2 \left(-\frac{24}{32\omega_0^3} \dot{y}\right) y \bar{F}_1 + \left(\frac{3a^2}{32\omega_0} - \frac{12}{32\omega_0^3} \dot{y}^2\right) a^2 \omega_0^2 \sin^2 \psi (-\omega_0^3) \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) a \cos \psi$$

Les deux premiers termes étant nuls, on a après simplification :

$$F_2 = \frac{\omega_0^2 a^2}{128} (a^2 + 48(1 - \frac{a^2}{4})) y .$$

L'équation linéarisée s'écrit ainsi :

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \mu \omega_0 \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) \dot{y} + \mu^2 \frac{\omega_0^2 a^2}{128} \left[a^2 + 48 \left(1 - \frac{a^2}{4}\right) \right] y .$$

IV - A - 2 Recherche de la solution périodique pour le

système : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu f(x, \dot{x})$ (IV - 8)

La méthode de linéarisation équivalente, dans le cas de la recherche de la solution exacte est comme nous venons de le voir, relativement lourde. Celle-ci peut considérablement se simplifier dans le cas de la recherche de la solution périodique qui est le problème qui nous intéresse plus précisément.

Comme dans le cas de la solution générale on effectue le changement de variable : $x = y + \mu G(\mu, t)$. (IV - 9) tel que $\ddot{y} + \omega_0^2 y = \mu F(y, \dot{y})$, (IV - 10), où F est une fonction linéaire en y et $\dot{y}$, représentant le premier harmonique du développement de $f(y + \mu G, \dot{y} + \mu \dot{G})$ en série de Fourier.

Soit l'équation linéaire (tirée de IV - 10) :

$$\ddot{y} + \mu \beta \dot{y} + \omega^2 y = 0 . \quad (IV - 11)$$

Comme nous recherchons la solution périodique nous aurons $\beta = 0$.

Soit $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$ dont la solution est $y = a \cos(\omega t + \varphi) = a \cos \psi$.

En portant (IV-9) dans (IV-8) et en tenant compte de (IV-10) il vient :

$$\ddot{G} + \omega_0^2 G = f(y + \mu G, \dot{y} + \mu \dot{G}) - F(y, \dot{y}) . \quad (IV - 12)$$

Dans cette expression F étant linéaire, ne comporte que les premiers harmoniques, on annule au second membre de (IV-12) l'ensemble des termes — (premier harmonique). De cette manière il n'y a plus de termes séculaires dans G, qui reste borné lorsque t croît. G ne comportera que des harmoniques supérieurs à un et par ailleurs la convergence du processus n'est pas détruite.

Les différents stades d'approximation s'obtiennent de la même manière que lors de la recherche de la solution générale, c'est-à-dire, un développement de $f(y + \mu G, \dot{y} + \mu \dot{G})$ en série de Taylor, un développement de F et G suivant les puissances de μ , puis une identification des deux membres de (IV-12) par rapport à μ .

$$\text{D'où} \quad \left. \begin{aligned} F(y, \dot{y}) &= \overline{f(y + \mu G, \dot{y} + \mu \dot{G})} , \\ \ddot{G} + \omega_0^2 G &= f(y + \mu G, \dot{y} + \mu \dot{G}) . \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV} - 13)$$

Soit si l'on s'arrête à la seconde approximation :

$$f(y + \mu G, \dot{y} + \mu \dot{G}) = f(y, \dot{y}) + \mu \frac{\partial f}{\partial y} G + \mu \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \dot{G} + O(\mu^2). \quad (\text{IV} - 14)$$

$$\left. \begin{aligned} F &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{n-1} F_n , \\ G &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{n-1} G_n . \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV} - 15)$$

$$\text{avec :} \quad \left. \begin{aligned} F_1 &= \overline{f(y, \dot{y})} ; \quad \ddot{G}_1 + \omega_0^2 G_1 = \widetilde{f(y, \dot{y})} . \\ F_2 &= \frac{\partial f}{\partial y} G_1 + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \dot{G}_1 ; \quad \ddot{G}_2 + \omega_0^2 G_2 = \frac{\partial f}{\partial y} G_1 + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \dot{G}_1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV-16})$$

Exemple : pour $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu x^3$.

On a successivement : $F_1 = y^3 = \frac{a^3}{4} (3 \cos \psi + \cos 3 \psi)$,

$$= \frac{3}{4} a^3 \cos \psi = \frac{3}{4} a^2 y \quad .$$

$$\ddot{G}_1 + \omega_0^2 G_1 = y^3 = \frac{a^3}{4} \cos 3 \psi ,$$

$$\Rightarrow G_1 = - \frac{a^2}{32 \omega_0^2} \cos 3 \psi \quad .$$

$$F_2 = 3 y^2 G_1 = \frac{3 a^5}{32 \cdot 4 \cdot \omega_0^2} \cos \psi = \frac{3 a^4}{128 \omega_0^2} y$$

L'équation (IV-10) s'écrit d'après (IV-15) :

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = F_1 + \mu F_2 + \mu^2 F_3 + \dots \quad \text{où} \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = y \left(\frac{3}{4} \mu a^2 - \frac{3 \mu^2 a^4}{128 \omega_0^2} \right) .$$

d'où la nouvelle pulsation ω donnée par :

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \mu \frac{3 a^2}{4} + \mu^2 \frac{3 a^4}{128 \omega_0^2} \quad .$$

IV - A - 3 Solution périodique pour l'oscillateur forcé

Soit l'équation : $\ddot{x} + 2 \beta_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = \mu f(x, \dot{x}) + H \cos \Omega t$. (IV-17)

On effectue toujours le même changement de variable :

$$x = y + \mu G(\mu, t) \quad . \quad (\text{IV} - 18)$$

Pour arriver à : $\ddot{y} + 2 \beta_0 \dot{y} + \omega_0^2 y = \mu F(y, \dot{y}) + H \cos \Omega t$. (IV - 19)

Comme F est linéaire en y et $\dot{y}$ on peut écrire $F(y, \dot{y}) = \beta_1 \dot{y} + \omega_1^2 y$

et l'on a $\ddot{y} + 2 \beta \dot{y} + \omega^2 y = H \cos \Omega t$. (IV - 20)

dont la solution est : $y = \frac{H \cos(\Omega t - \alpha)}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4 \beta^2 \Omega^2}}$. (IV - 21)

$$\text{avec : } 2\beta = 2\beta_0 - \mu \frac{F(\dot{y})}{\dot{y}} = 2\beta_0 - \mu\beta_1 \quad \text{et} \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \mu \frac{F(y)}{y},$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \mu\omega_1^2.$$

$$\left. \begin{aligned} \text{et} \quad \sin \alpha &= \frac{2\beta\Omega}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}, \\ \cos \alpha &= \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV} - 22)$$

La séparation des termes et les différents stades d'approximation s'obtenant identiquement au cas de la solution périodique non forcée (§ IV - A - 2)

Donc après séparation des termes en - et en $\sim$ on a :

$$\left. \begin{aligned} F &= f(y + \mu G, \dot{y} + \mu \dot{G}), \\ \text{et} \quad \ddot{G} + 2\beta_0 \dot{G} + \omega_0^2 G &= f(y + \mu G, \dot{y} + \mu \dot{G}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV} - 23)$$

IV - B - UTILISATION DES POLYNÔMES ORTHOGONAUX ET METHODE DE LINEARISATION EQUIVALENTE.

L'utilisation des polynômes orthogonaux aux équations différentielles dans le but de linéariser le terme non linéaire a été examiné au chapitre précédent.

Pour les exemples d'équations différentielles étudiés, la méthode donnait des résultats satisfaisants, mais divergents toutefois de ceux obtenus par les méthodes numériques dès que la non linéarité devenait trop importante.

D'autre part, dans le cas de certaines équations type Van der Pol (autonome ou non autonome) la méthode ne convenait pas.

Et en dernier lieu, comme nous l'avons vu, la méthode ne permettait de déterminer qu'imparfaitement la solution finale puisque

nous ne pouvons obtenir que le premier harmonique.

Il apparaît nécessaire, de trouver une méthode analytique (tout du moins ne comportant qu'un minimum de calculs numériques), ne pouvant évidemment encore rivaliser en exactitude avec des méthodes "entièrement" numériques, mais donnant des résultats, (aussi bien pour la forme de la solution, que pour le calcul des périodes, amplitudes, etc ...) meilleurs que les méthodes de perturbations classiques, ainsi que celle qui vient d'être présentée [chapître III].

Il importe que cette méthode soit donc applicable à certains types d'équations différentielles non linéaires, tel que le paramètre de non linéarité soit supérieur à 1.

Nous avons vu § IV - A - 1 que, lorsque le paramètre de non linéarité μ était $\ll 1$, il était alors possible de développer $f(x, \dot{x})$ en série de Taylor. Dans le cas où $\mu \geq 1$ ce développement devient impossible.

Or, d'après les résultats du chapitre I la meilleure approximation "en moyenne" que l'on peut donner d'une fonction est le développement en une série de polynômes orthogonaux (et dans notre cas particulier en polynômes de Tchebycheff), le paramètre de non linéarité de la fonction, n'ayant aucune influence sur ce développement.

Soit une fonction $f(x, \dot{x})$ donnée par son développement en série de polynômes :

$$f(x, \dot{x}) = a_0 P_0(x/A) + b_0 P_0(\dot{x}/B) + a_1 P_1(x/A) + b_1 P_1(\dot{x}/B) + \dots \\ + a_n P_n(x/A) P_n(\dot{x}/B) + a_n P_n(x/A) + b_n P_n(\dot{x}/B) + \dots ;$$

$$- A \leq x \leq A \quad - B \leq \dot{x} \leq B .$$

L'on sait que l'une des propriétés essentielles des polynômes orthogonaux tient à leur convergence "rapide".

Soit maintenant une équation différentielle du type :

$$\ddot{x} + \mu f(x) = 0 \quad , \quad \text{où } f(x) \text{ fonction non linéaire} :$$

- Dans un premier temps développons jusqu'à un certain ordre la fonction $f(x)$ en série de polynômes orthogonaux.

- Dans un deuxième temps, nous ne conserverons après développement que le terme linéaire dans le premier membre de l'équation de départ, le reste du développement étant placé au second membre.

Nous obtenons une équation du type :

$$\ddot{x} + \mu a_1 P_1(x/A) = - \mu \sum_{n=2}^m a_n P_n(x/A) \quad m \rightarrow \infty$$

Le terme $a_1 P_1(x/A)$ étant supérieur à tous les autres, il est donc possible d'appliquer à cette équation une méthode de perturbation classique, [en particulier dans le cas de la recherche de la solution périodique, la méthode de "linéarisation équivalente"]. Posons :

$$\sum_{n=2}^m a_n P_n = f_1. \text{ Cette fonction } f_1(x) \text{ pourra, après avoir}$$

effectué le changement de variable $x = y + G(t, \mu)$, être développée en série de Taylor au voisinage de y suivant le procédé examiné au § - IV - A - 2 .

Il est évident que tout ce qui vient d'être dit peut s'appliquer à d'autres types d'équations différentielles autonomes ou non-autonomes, telles que :

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0, \quad \ddot{x} + f(x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0$$

$$x^{(n)} + f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu f(x, \frac{\partial x}{\partial t}, \dots)$$

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = F \cos \Omega t \quad \text{etc ...}$$

Donnons un exemple pour mieux préciser le sens de la méthode

Soit $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu x^3$

On développe x^3 en série de polynômes orthogonaux.

$$\left. \begin{aligned} x^3 &= a_1 P_1(x/A) + a_3 P_3(x/A) \\ x^3 &= \alpha_1 x + (\alpha_2 x + \alpha_3 x^3) \end{aligned} \right\}$$

$$\text{d'où } \ddot{x} + (\omega_0^2 - \mu \alpha_1) x = \mu (\alpha_2 x + \alpha_3 x^3)$$

$$\text{avec } f_1(x) = (\alpha_2 x + \alpha_3 x^3) .$$

C'est sur ce système que nous expliquons la méthode de linéarisation équivalente. [Les résultats du § IV-A-3 s'appliquant intégralement ici].

Une extension au calcul de la solution générale pourrait être donnée, mais dans ce cas la méthode de linéarisation équivalente est inapplicable, et il faudrait utiliser pour ce faire la méthode de la "Moyenne". (ou autres).

IV - QUELQUES CALCULS PRATIQUES DES a_n , P_n etc SUIVANT

DIFFERENTES VALEURS DE $F(x)$.

On utilise les polynômes de Tchebycheff :

$$P_n(x) = A_n (1 - x^2)^{1/2} \frac{d^n}{dx^n} (1 - x^2)^{n-1/2}$$

$$A_n = (-1)^n \frac{2^n n!}{(2n)!}$$

On a :

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$P_3(x) = 4x^3 - 3x, \text{ etc}$$

$$a_n = \frac{\int_{-1}^{+1} f(\lambda x) P_n(x) (1 - x^2)^{-1/2} dx}{\int_{-1}^{+1} P_n^2(x) (1 - x^2)^{-1/2} dx}$$

$$\text{Si } \underline{f(x) = \text{cst.} = \alpha}$$

$$\text{on } a : a_0 = \alpha$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 0$$

$$a_3 = 0$$

$$\text{Si } \underline{f(x) = x}$$

$$\text{on } a : a_0 = 0$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 0$$

$$a_3 = 0$$

$$\text{Si } \underline{f(x) = x^2}$$

$$a_0 = 1/2$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 1/2$$

$$a_3 = 0$$

$$\text{Si } \underline{f(x) = x^3}$$

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 3/4$$

$$a_2 = 0$$

$$a_3 = 1/4$$

DEUXIEME PARTIE

APPLICATIONS

II - 1 - ETUDE DE L'EQUATION : $\ddot{x} + x^3 = 0$ (1)

A) L'on sait que cette équation admet une infinité de solutions périodiques, de même période et d'amplitude différente dépendant des conditions initiales.

Le développement de $f(x) = x^3$ en polynômes orthogonaux donne :

$$(2) \quad \begin{cases} x^3 = a_1 P_1(x/A) + a_3 P_3(x/A), \\ a_1 P_1(x/A) = \frac{3}{4} A^2 x, \quad a_3 P_3(x/A) = x^3 - \frac{3}{4} A^2 x. \end{cases}$$

Solution obtenue à partir du premier terme du développement en polynômes orthogonaux.

$$\ddot{x} + \frac{3}{4} A^2 x = 0. \quad (3)$$

La période de (3) est donnée directement par :

$$Ta_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_1^2}} \quad (4) \quad \text{avec} \quad \omega_1^2 = \frac{3}{4} A^2.$$

B) Application de la méthode proposée

$$\ddot{x} + \frac{3}{4} A^2 x = \frac{3 A^2}{4} x - x^3. \quad (5)$$

Le système linéaire équivalent [voir Chap.4] s'écrit dans ce cas :

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = F(y) \implies \ddot{y} + \omega_1^2 y = 0. \quad (5 \text{ bis})$$

En posant : $\omega_0^2 = \frac{3}{4} A^2$ d'où la solution :

$$\omega_1^2 = \frac{3}{4} A^2 - \frac{F(y)}{y} \quad \underline{y = a \cos \omega_1 t} \quad (6)$$

Première approximation

$$\ddot{G}_1 + \frac{3}{4} A^2 G_1 = f(y) - F_1(y). \quad (7)$$

$$f(y) = \frac{3 A^2}{4} y - y^3$$

d'où tous calculs faits :

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} F_1(y) = \left(\frac{3}{4} A^2 - 3 \frac{a^2}{4} \right) y, \\ \text{donc } \omega_1^2 = \frac{3}{4} A^2 - \frac{3}{4} A^2 + \frac{3}{4} a^2 = \frac{3}{4} a^2, \\ G_1 = - \frac{a^3 \cos 3 \omega_1 t}{4 \left[\frac{3}{4} A^2 - 9 \omega_1^2 \right]} \end{array} \right.$$

En deuxième approximation

$$\ddot{G}_2 + \frac{3}{4} A^2 G_2 = \frac{\partial f}{\partial y} G_1 - F_2(y), \quad (9)$$

$$\text{avec } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3}{4} A^2 - 3 y^2$$

d'où tous les calculs faits :

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} F_2(y) = \frac{3 a^4}{16 \left(\frac{3 A^2}{4} - 9 \omega_1^2 \right)} y, \\ G_2 = - \frac{a^3 \left(\frac{3}{4} A^2 - \frac{3}{2} a^2 \right)}{4 \left(\frac{3}{4} A^2 - 9 \omega_1^2 \right)^2} \cos 3 \omega_1 t + \frac{3 a^5 \cos 5 \omega_1 t}{16 \left(\frac{3}{4} A^2 - 9 \omega_1^2 \right) \left(\frac{3}{4} A^2 - 25 \omega_1^2 \right)} \end{array} \right.$$

$$\omega_1^2 = \frac{3}{4} a^2 - \frac{3 a^4}{16 \left(\frac{3 A^2}{4} - 9 \omega_1^2 \right)} \quad (\text{en 2ème approximation})$$

Calculs de a et ω_1 :

A étant l'amplitude de la solution x, on suppose que l'on a les conditions initiales :

$$\text{à } t = 0 \quad \left| \begin{array}{l} x = A \\ \dot{x} = 0 \end{array} \right.$$

Soit en première approximation :

$$(11) \quad \begin{cases} x = a \cos \omega_1 t - \frac{a^3}{4(\frac{3}{4}A^2 - 9\omega_1^2)} \cos 3\omega_1 t, \\ x = y + G_1 \end{cases}$$

d'où,

$$(12) \quad \begin{cases} A = a - \frac{a^3}{4(\frac{3}{4}A^2 - 9\omega_1^2)} \\ \omega_1^2 = \frac{3}{4}a^2 - \frac{3a^4}{16(\frac{3}{4}A^2 - 9\omega_1^2)} \end{cases}$$

En combinant les deux équations (12), on obtient :

$$(12 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \omega_1^2 = \frac{3}{4} A a, \\ a^3 + 27 A a^2 - 30 A^2 a + 3 A^3 = 0. \end{cases}$$

En s'imposant A on déterminera la valeur de a.

La deuxième période approchée T_{a_2} sera donc donnée par :

$$T_{a_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3}{4} A a}} \quad (13)$$

T_{a_2} : Période approchée de l'équation (1) donnée par notre méthode.

C) Période exacte

Ici le calcul est bien connu, cette période s'exprime [3] sous forme d'une intégrale elliptique de première espèce :

$$T_e = \frac{4\sqrt{2}}{A} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \quad (14)$$

$$\text{ou } \begin{cases} k^2 = 1/2 \\ \psi = \pi/2 \end{cases}$$

$$\text{on pose } \begin{aligned} k &= \sin \alpha \\ \alpha &= 45^\circ \end{aligned}$$

$$Te = \frac{4}{A} F(\alpha, \psi).$$

Les tables donnent :

$$F(\alpha, \psi) = 1,8541.$$

$$Te = \frac{7,4164}{A} . \quad (15)$$

=====

Résultats numériques

En rapportant les résultats sous forme d'un tableau on obtient :

A	Te	Ta ₁	C ₁	Ta ₂	C ₂	a
1	7,4164	7,2551	2 %	7,39979	0,2 %	0,96130
3	2,472133	2,418399	2 %	2,466598	0,2 %	2,8839
5	1,48328	1,45103	2 %	1,47995	0,22%	4,80651

$$C_1 = \frac{Te - Ta_1}{Te} \quad C_2 = \frac{Te - Ta_2}{Te}$$

Remarque

La solution x est donnée par :

$$x = a \cos \omega_1 t - \left[\frac{a^3}{4 \left(\frac{3}{4} A^2 - 9 \omega_1^2 \right)} + \frac{a^3 \left(\frac{3}{4} A^2 - \frac{3}{4} a^2 \right)}{4 \left(\frac{3}{4} A^2 - 9 \omega_1^2 \right)^2} \right] \cos 3 \omega_1 t$$

$$+ \frac{3 a^5 \cos 5 \omega_1 t}{16 \left[\frac{3}{4} A^2 - 9 \omega_1^2 \right] \left[\frac{3}{4} A^2 - 25 \omega_1^2 \right]} . \quad (16)$$

D) Remarque : cas de l'équation $\ddot{x} + \mu x^3 = 0$ (17)

μ : entier positif

Ce cas n'apporte aucune difficulté par rapport à l'équation (1). Il suffit d'effectuer un changement de l'échelle du temps en posant :

$$t = \mu \tau$$

La nouvelle période sera donnée par :

$$P = T \times \frac{1}{\sqrt{\mu}},$$

$$P_e = \frac{4 F(\alpha, \varphi)}{A \sqrt{\mu}} = \frac{7,4164}{A \sqrt{\mu}}, \quad (18)$$

$$P_{a_1} = \frac{2 \pi}{\sqrt{\mu} \sqrt{\frac{3}{4} A^2}}, \quad (19)$$

$$P_{a_2} = \frac{2 \pi}{\sqrt{\mu} \sqrt{\frac{3}{4} a A}}. \quad (20)$$

Conclusion

L'on peut constater que l'erreur de notre méthode par rapport à la valeur exacte est sensiblement dix fois plus faible que l'erreur due à la méthode du § A.

L'on a d'autre part comparé notre méthode, à une méthode de perturbation classique : la balance harmonique.

En ne considérant que les deux premiers harmoniques :
 $x = a_1 \cos \omega_1 t + a_3 \cos 3 \omega_1 t$, les résultats sont les suivants :

μ	A	Te	Ta ₂	C ₂	Ta ₃	C ₃
1	1,04481778	7,09827124	7,082375905	0,2%	7,08168543	0,22 %
1	2,089635767	3,5491353	3,54118776	0,22%	3,5421394	0,2 %
1	3,134453240	2,3660905	2,361487	0,19%	2,3614262	0,2 %
1	4,1792715	1,7745676	1,770594336	0,22%	1,7710696	0,2 %
5	1,04481778	3,1744434	3,16773479	0,21%	3,1681856	0,2 %
10	1,04481778	2,2446704	2,2396439	0,22%	2,2402455	0,2 %

$$C_3 = \frac{T_e - Ta_3}{T_e}$$

Ta_3 : calcul de la période de l'équation (1)
par la méthode de la balance harmonique.

D'après ces résultats on ne peut conclure, sur cet exemple, que notre méthode apporte des améliorations sensibles, par rapport aux méthodes de perturbations classiques.

Nous verrons, que c'est le seul exemple traité, sur lequel les résultats par les deux méthodes sont aussi proches.

II - 2 - ETUDE DE L'EQUATION : $\ddot{x} + x + \mu x^3 = 0$. (1)

A) Cette équation possède elle aussi une infinité de solutions périodiques de même période et d'amplitudes différentes.

développement de $f(x) = x^3$ en polynômes orthogonaux :

$$(2) \quad \begin{cases} x^3 = a_1 P_1(x/A) + a_3 P_3(x/A), \\ = \frac{3}{4} A^2 x + (x^3 - \frac{3}{4} A^2 x). \end{cases} \quad x \in [-A, A]$$

La solution obtenue à partir du premier terme du développement en polynômes orthogonaux donne :

$$\ddot{x} + x + \frac{\mu 3 A^2}{4} x = 0, \Rightarrow \ddot{x} + (1 + \frac{\mu 3 A^2}{4}) x = 0 \quad (3)$$

$$\text{soit la période : } \left. \begin{aligned} Ta_1 &= \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2}} \\ \text{avec } \omega_0^2 &= (1 + \frac{\mu 3 A^2}{4}) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

la solution étant de la forme, $x = A \cos \omega_0 t$.

B) Application de la méthode préposée.

$$\ddot{x} + (1 + \frac{\mu 3 A^2}{4}) x = \mu (\frac{3}{4} A^2 x - x^3). \quad (5)$$

Le système équivalent s'écrivant :

$$(6) \quad \begin{cases} \ddot{y} + \omega_0^2 y = \mu F(y), \\ \ddot{y} + \omega_1^2 y = 0, \end{cases} \quad \text{avec } \omega_1^2 = (1 + \frac{\mu 3 A^2}{4}) - \mu \frac{F(y)}{y}.$$

La solution étant donnée par : $y = a \cos \omega_1 t$ (7)

Première approximation

$$(8) \quad \begin{cases} \ddot{G}_1 + (1 + \frac{\mu 3 A^2}{4}) G_1 = [f(y) - F_1(y)] \mu, \\ f(y) = \frac{3}{4} A^2 y - y^3. \end{cases}$$

D'où tous calculs faits :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1(y) = \mu \frac{3}{4} (A^2 - a^2) y , \\ G_1 = - \frac{\mu a^3 \cos 3 \omega_1 t}{4 \left(\frac{3}{4} \mu A^2 + 1 - 9 \omega_1^2 \right)} . \end{array} \right.$$

En deuxième approximation on obtient :

$$\ddot{G}_2 + \left(1 + \frac{\mu 3 A^2}{4} \right) G_2 = \left[\frac{\partial f}{\partial y} G_1 - F_2(y) \right] \mu .$$

D'où tous calculs faits :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_2(y) = \frac{3 \mu^2 a^4}{16 \left[\frac{3}{4} \mu A^2 + 1 - 9 \omega_1^2 \right]} y , \\ G_2 = \frac{- \mu^2 (3 A^2/4 - 3 a^2/2)}{4 \left(\frac{\mu 3 A^2}{4} + 1 - 9 \omega_1^2 \right)} a^3 \cos 3 \omega_1 t + \frac{3 \mu a^5}{16 \left[\frac{3}{4} \mu A^2 + 1 - 9 \omega_1^2 \right] \left[\frac{3 \mu A^2}{4} + 1 - 25 \omega_1^2 \right]} \cos 5 \omega_1 t \end{array} \right.$$

De la deuxième approximation on tire :

$$\omega_1^2 = 1 + \frac{\mu 3 a^2}{4} - \frac{3 \mu^2 a^4}{16 \left[\frac{3}{4} \mu A^2 + 1 - 9 \omega_1^2 \right]} . \quad (11)$$

Les calculs du coefficient a et de l'amplitude A s'établissent de la même manière que dans l'étude de l'équation $\ddot{x} + x^3 = 0$.

$$A = \text{amplitude de la solution } x. \quad \begin{cases} A = x(0) \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{En première approximation} \\ x = a \cos \omega_1 t - \frac{\mu a^3}{4 \left(\frac{3}{4} \mu A^2 + 1 - 9 \omega_1^2 \right)} \cos 3 \omega_1 t , \\ x = y + G_1 . \end{array} \right.$$

$$\text{d'où } A = a - \frac{\mu a^3}{4(\frac{3}{4}\mu A^2 + 1 - 9\omega_1^2)}$$

$$\begin{aligned} \text{On tire : } & \left\{ \begin{aligned} \omega_1^2 &= 1 + \mu \frac{3}{4} A a, \\ \text{et l'équation} \\ \text{en } \underline{a} \text{ donne : } & a^3 + 27 A^2 a^2 + \left(\frac{32}{\mu} - 30 A^2 \right) a + 3 A^3 - \frac{32}{\mu} A = 0. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Connaissant la valeur de A (ou en se l'imposant) on tire facilement a.

La valeur de la période en deuxième approximation est donnée par :

$$Ta_2 = \frac{2 \pi}{\sqrt{1 + \frac{3}{4} A a \mu}}. \quad (13)$$

C) Calcul de la période exacte

Voir [3], sur l'étude de l'équation :

$$\ddot{x} + ax + bx^3 = 0.$$

$$Te = \frac{4 K(k)}{\left[1 + \mu A^2\right]^{1/2}} \cdot (14)$$

K(k) : intégrale elliptique
de première espèce

$$\text{où } k^2 = \frac{\mu A^2}{2(\mu A^2 + 1)}.$$

Applications numériques

On rapporte les différents résultats sous forme d'un tableau.

Tableau I

	Te	Ta ₁	C ₁	Ta ₂	C ₂	a
A=1, μ=1	4,76872	4,74964	0,4 %	4,7671419	0,03%	0,98290
A=5, μ=1	1,44184	1,41382	2 %	1,439188	0,2%	4,81602
A=1, μ=3	3,519	3,485284	2 %	3,518528	0,01%	
A=1, μ=5	2,9214247	2,882923	1,3 %	2,918644	0,1%	
A=1, μ=10	2,190778407	2,155114787	1,6 %	2,188464722	0,07%	$c_1 = \frac{Te-Ta_1}{Te}$
A=5, μ=10	0,4668313802	0,4576402257	2 %	0,4666628933	0,03%	$c_2 = \frac{Te-Ta_2}{Te}$

On a cherché certaines solutions, telles que dans l'équation en a on ait le terme $3 A^3 - \frac{32 A}{\mu} = 0 \implies A^2 = \frac{32}{3\mu}$,

$$\text{d'où } a \left[a^2 + 27 Aa - \frac{288}{\mu} \right] = 0 \implies \begin{cases} a = 0 \\ a_{1,2} = \frac{-27A \pm \sqrt{27^2 A^2 + \frac{1152}{\mu}}}{2} \end{cases}$$

On a trouvé :

Pour μ = 2 $\longrightarrow$ A = 2,3094.

$$\begin{cases} Te = 2,13020 . \\ Ta_1 = 2,0944 . \\ Ta_2 = 2,127274 . \end{cases} \quad (k = 0,45714)$$

Pour $\mu = 5 \longrightarrow A = 1,4606$.

$$\begin{cases} Te = 2,1307954 . \\ Ta_1 = 2,0944 . \\ Ta_2 = 2,1274 . \end{cases}$$

Tableau 2

μ	A	Te	Ta ₁	C ₁	Ta ₂	C ₂
2	2,3094	2,13020	2,0944	1,7 %	2,127274	0,1 %
5	1,4606	2,1307954	2,0944	1,7 %	2,1274	0,1 %

La méthode a été comparée pour cet exemple, à une méthode de perturbation classique, dans ce cas nous avons utilisé la méthode de linéarisation équivalente sans les polynômes orthogonaux.

D) Calcul par la linéarisation équivalente sans les polynômes orthogonaux.

Les calculs ne seront pas développés puisqu'il s'agit en fait du même raisonnement qu'au § B. sans le développement en polynômes orthogonaux.

$$\ddot{x} + x = -\mu x^3. \quad (15)$$

$$(16) \quad \begin{cases} x = y + \hat{G}_n . \\ \ddot{y} + y = F_n(y) . \\ \omega_1^2 = 1 - \frac{F_n(y)}{y} . \end{cases} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow \ddot{y} + \omega_1^2 y = 0 . \\ &\Rightarrow \text{solution de la forme } y = a \cos \omega_1 t . \end{aligned}$$

Première approximation

$$\ddot{G}_1 + G_1 = -\mu a^3 \cos^3 \omega_1 T. \quad (17)$$

$$(18) \quad \begin{cases} F_1(y) = - \frac{3 \mu a^2}{4} y . \\ \omega_1^2 = 1 + \frac{3 \mu a^2}{4} . \\ G_1 = - \frac{\mu a^3}{4 [1 - 9 \omega_1^2]} \cos \omega_1 t . \end{cases}$$

Deuxième approximation

$$\ddot{G}_2 + G_2 = \frac{\partial f}{\partial y} G_1 - F_2(y) . \quad (19)$$

$$(20) \quad \begin{cases} F_2(y) = \frac{3 \mu^2 a^4}{16 [1 - 9 \omega_1^2]} y . \\ \Rightarrow \omega_1^2 = 1 + \frac{3 \mu a^2}{4} - \frac{3 \mu^2 a^4}{16 [1 - 9 \omega_1^2]} . \end{cases}$$

à $t = 0$ $A =$ amplitude de la solution x .

$$(20) \quad \begin{cases} A = a - \frac{\mu a^3}{4 [1 - 9 \omega_1^2]} . \\ \omega_1^2 = 1 + \frac{3 \mu a A}{4} \end{cases}$$

d'où l'équation en a :

$$a^3 + 27 a^2 A + \left(\frac{32}{\mu} - 27 A^2 \right) a - \frac{32}{\mu} A = 0 . \quad (21)$$

La période Ta_3 étant donnée par :

$$Ta_3 = \frac{2 \pi}{\sqrt{1 + \frac{3 \mu a A}{4}}} . \quad (22)$$

Applications numériques

Tableau 3

	Te	Ta ₂	Ta ₃	C ₃
A = 1, μ = 1	4,7687	4,7671419	4,7662745	0,05 %
A = 1, μ = 5	2,9214247	2,918644	2,915470896	0,2 %
A = 1, μ = 10	2,190178407	2,188464722	2,185195289	0,2 %
A = 5, μ = 10	0,4668313804	0,4666628933	0,4656686644	0,2 %

$$C_3 = \frac{Te - Ta_3}{Te}$$

Conclusion

On constate, tableau 1 que le % d'erreur entre Ta₁ et Ta₂ par rapport à Te est semblable à celui de l'exemple : $\ddot{x} + \mu \ddot{x}^3 = 0$.

L'on s'aperçoit que pour des valeurs faibles de μ et de A la méthode de linéarisation équivalente sans les polynômes orthogonaux, donne des résultats sensiblement identiques à ceux donnés par notre méthode.

Mais l'on constate (tableau 1 et 3) que, lorsque ces deux paramètres augmentent sensiblement notre méthode donne des résultats nettement améliorés par rapport à la méthode de linéarisation équivalente seule.

On rappelle :

Te : période exacte

Ta₁ : période approchée lorsque l'on prend le terme linéaire seul du développement en polynômes orthogonaux.

Ta₂ : période approchée lorsque tous les termes du développement en polynômes orthogonaux sont considérés.

Ta₃ : période approchée, méthode de linéarisation classique (linéarisation équivalente).

L'on peut comparer nos résultats à ceux donnés par HAYASHI [11] ,
où il utilise pour l'équation (1) la méthode des perturbations.

Il donne pour la nouvelle fréquence :

$$\omega = 1 + \frac{3}{8} \mu A^2 - \frac{21}{256} \mu^2 A^4 + \dots$$

Soit la période : $Ta_4 = \frac{2 \pi}{\omega}$

	Te	Ta ₂	C ₂	Ta ₄	C ₄
A = 1, μ = 1	4,76872	4,7671419	0,03%	4,8595044	2%
A = 5, μ = 1	1,44184	1,439188	0,2%	ω < 0	
A = 1, μ = 10	2,190178407	2,188464722	0,07%	ω < 0	
A = 5, μ = 10	0,46683138	0,46666289	0,03%	ω < 0	
A = 1, μ = 3	3,519	3,51828	0,01%	4,5309739	28%
					$C_4 = \frac{Te - Ta_4}{Te}$

L'on constate bien ici l'amélioration due à notre méthode, par rapport aux méthodes classiques.
(surtout dans le cas de fortes non linéarités).

II - 3 - ETUDE DE L'EQUATION PENDULAIRE :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0 . \quad (1)$$

A) L'équation (1) admet elle aussi une infinité de solutions périodiques de même période et d'amplitudes différentes, suivant les conditions initiales.

Le développement de $f(x) = \sin x$ en polynômes orthogonaux donne :

$$\sin x = a_1 P_1\left(\frac{x}{A}\right) + a_3 P_3\left(\frac{x}{A}\right) + \dots , \quad (2)$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} a_1 P_1\left(\frac{x}{A}\right) &= \frac{2 J_1(A)}{A} x , \\ a_3 P_3\left(\frac{x}{A}\right) &= \frac{6 J_3(A)}{A} x - \frac{8 J_3(A)}{A^3} x^3 . \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

avec $J_1(A)$, $J_3(A)$ fonctions de Bessel de première espèce.

Pour le développement des calculs cf. [3] .

L'équation différentielle obtenue en gardant uniquement le premier terme du développement en polynômes orthogonaux prend la forme :

$$\ddot{x} + \frac{2 \omega_0^2 J_1(A)}{A} x = 0 . \quad (4)$$

d'où la période de l'équation (4)

$$Ta_1 = \frac{2 \pi}{\omega_0 \sqrt{\frac{2 J_1(A)}{A}}} . \quad (5)$$

B) Application de la méthode proposée

En arrêtant l'approximation au polynôme d'ordre 3 l'équation (1) devient :

$$\ddot{x} + \frac{2 \omega_0^2 J_1(A)}{A} x = \frac{8 J_3(A) \omega_0^2}{A^3} x^3 - \frac{6 J_3(A)}{A} x . \quad (6)$$

d'où le système linéaire équivalent :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y} + \frac{2 \omega_0^2 J_1(A)}{A} y &= f(y) - F_n(y) \\ \text{où } \ddot{y} + \omega_1^2 y &= 0 \implies \text{solution } y = a \cos \omega_1 t \\ \text{avec : } \omega_1^2 &= \frac{2 \omega_0^2 J_1(A)}{A} - \frac{F(y)}{y} \end{aligned} \right\} (7)$$

Première approximation

$$\ddot{G}_1 + \frac{2 \omega_0^2 J_1(A)}{A} G_1 = f(y) - F_1(y) , \quad (8)$$

$$\text{avec } f(y) = \frac{8 J_3(A) \omega_0^2}{A^3} y^3 - \frac{6 J_3(A) \omega_0^2}{A} y .$$

Tous calculs faits on trouve :

$$\left. \begin{aligned} F_1(y) &= \frac{6 J_3(A) \omega_0^2}{A} \left[\frac{a^2}{A^2} - 1 \right] , \\ G_1 &= \frac{2 J_3(A) \omega_0^2 a^3}{A^3 \left[\frac{2 \omega_0^2 J_1(A)}{A} - 9 \omega_1^2 \right]} \cos 3 \omega_1 t . \end{aligned} \right\} (9)$$

La deuxième approximation nous donne :

$$\ddot{G}_2 + \frac{2 \omega_0^2 J_1(A)}{A} G_2 = \frac{\partial f}{\partial y} G_1 - F_1(y) , \quad (10)$$

- 59 -

avec $\frac{\partial f}{\partial y} = - \frac{6 J_3(A) \omega_0^2}{A} + \frac{24 J_3(A) \omega_0^2}{A^3} y^2.$

Tous calculs faits on a :

$$\begin{aligned}
 F_2(y) &= \frac{12 J_3^2(A) \omega_0^4 a^4}{A^6 \left[\frac{2 \omega_0^2 J_1(A)}{A} - 9 \omega_1^2 \right]} y, \\
 G_2 &= \frac{2 J_3(A) \omega_0^2 a^3}{A^3 \left[\frac{2 \omega_0^2 J_1(A)}{A} - 9 \omega_1^2 \right]^2} \cdot \left[\frac{6 \omega_0^2 J_3(A)}{A} + \frac{a^2 12 \omega_0^2 J_3(A)}{A^3} \right] \cos 3 \omega_1 t \\
 &\quad + \frac{J_3(A) \omega_0^4 12 a^5}{A^6 \left[\frac{2 \omega_0^2 J_1(A)}{A} - 9 \omega_1^2 \right] \left[\frac{2 \omega_0^2 J_1(A)}{A} - 25 \omega_1^2 \right]} \cos 5 \omega_1 t.
 \end{aligned} \tag{11}$$

On a donc en deuxième approximation :

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} = \frac{2 \omega_0^2 J_1(A)}{A} - \frac{6 J_3(A) \omega_0^2}{A} \left[\frac{a^2}{A^2} - 1 \right] - \frac{12 J_3^2(A) \omega_0^4 a^4}{A^6 \left[\frac{2 \omega_0^2 J_1(A)}{A} - 9 \omega_1^2 \right]}. \tag{12}$$

Calcul des coefficients a et ω_1 :

A est l'amplitude de la solution x, soit en première approximation :

$$x = a \cos \omega_1 t + \frac{2 J_3(A) \omega_0^2 a^3}{A^3 \left(\frac{2 \omega_0^2 J_1(A)}{A} - 9 \omega_1^2 \right)} \cos 3 \omega_1 t.$$

On a à $t = 0$ $\left| \begin{array}{l} x = A, \\ \dot{x} = 0. \end{array} \right.$

$$A = a + \frac{2 J_3(A) \omega_0^2 a^3}{A^3 \left(\frac{2 \omega_0^2 J_1(A)}{A} - 9 \omega_1^2 \right)} . \quad (13)$$

de l'équation en A (13) et celle en ω_1^2 (12) on tire :

$$\omega_1^2 = \frac{2 \omega_0^2}{A} \left[J_1(A) + 3 J_3(A) \left(1 - \frac{a}{A} \right) \right] . \quad (14)$$

et en reportant cette valeur de ω_1^2 dans l'équation donnant A, on trouve l'équation en a :

$$2 \omega_0^2 \left[a^3 + 27 A a^2 - \left(54 + \frac{8 J_1(A)}{J_3(A)} \right) A^2 a + \left(\frac{8 J_1(A)}{J_3(A)} + 27 \right) A^3 \right] = 0 . \quad (15)$$

en se fixant ω_0 et A on pourra déterminer a.

C) Période exacte voir [3]

$$T_e = \frac{4}{\omega_0} K(k) ,$$

K(k) intégrale elliptique de première espèce,

$$k = \sin \frac{A}{2} .$$

Résultats numériques

Pour différentes valeurs de l'amplitude A nous avons calculé :

- La période exacte : T_e ,
- La période par la méthode du § A : Ta_1 ,
- La période calculée par notre méthode : Ta_2 ,
- La période calculée par M. CHALEAT [6] , à partir d'une méthode de perturbation : Ta_3 .

A	T_e	Ta_1	C_1	Ta_2	C_2	Ta_3	C_3
1	6,6992	6,697137048	0,03%	6,699647	0,006%	6,6983826	0,01%
2	8,357	8,2737976	1%	8,36229402	0,06%	8,2139554	1,7%
3	15,95	13,21483	18%	15,394128	3%	11,63984	27%

(A est exprimé en radians).

$$Ta_3 = 2 \pi \left[1 + \frac{A^2}{16} + \frac{11 A^4}{12(16)^2} + \dots \right]$$

$$C_1 = \frac{Te - Ta_1}{Te}$$

$$C_2 = \frac{Te - Ta_2}{Te}$$

$$C_3 = \frac{Te - Ta_3}{Te}$$

Conclusion

L'on constate, clairement ici, l'amélioration due à notre méthode par rapport aux méthodes de perturbations classiques, surtout dans le cas de grandes amplitudes.

D'autres remarques peuvent être apportées, dans le cadre de cet exemple.

L'on voit que l'on peut effectuer deux sortes d'améliorations :

- L'une portant sur une augmentation des termes lors du développement en polynômes orthogonaux.

$$\sin x = a_1 P_1 + a_3 P_3 + a_5 P_5 + a_7 P_7 + \dots$$

- L'autre, classique, provenant de l'augmentation du nombre d'approximations, dans l'application de la méthode de perturbation.

Il est évident qu'un problème important serait de connaître l'erreur commise, en ne considérant qu'un nombre limité de termes, lors du développement en polynômes orthogonaux, puis de connaître l'erreur totale sur le résultat final, lors des approximations successives dans la méthode de perturbation.

Il est intéressant de noter, que c'est dans de tels exemples que notre méthode prend toute son importance. C'est-à-dire lorsque la fonction non-linéaire de départ n'est pas déjà un polynôme.

Mais peu d'exemples de la sorte, ont été traité numériquement par d'autres auteurs, ce qui limitait notre champ d'applications.

$$\text{II - 4 - ETUDE DE L'EQUATION : } \ddot{x} + x^3 = \sin t \quad (1)$$

A) Cette équation a été étudiée, par différents auteurs, CESARI, URABE, VAN-DOOREN, pour la recherche de la solution périodique.

Le développement en polynômes orthogonaux de $f(x) = x^3$ donne :

$$\left. \begin{aligned} x^3 &= a_1 P_1(x/A) + a_3 P_3(x/A), \\ x^3 &= \frac{3 A^2}{4} x + x^3 - \frac{3 A^2}{4} x. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

L'équation différentielle obtenue à partir du premier terme du développement en polynômes orthogonaux est de la forme :

$$\ddot{x} + \frac{3 A^2}{4} x = \sin t. \quad (3)$$

$$\text{Soit une solution : } x = \frac{\sin t}{\frac{3 A^2}{4} - 1}. \quad (4)$$

$$\text{d'où la période : } Ta_1 = \frac{2 \pi}{\sqrt{\frac{3 A^2}{4} - 1}}. \quad (5)$$

D'autre part,

$$x = A x^* \quad (6) \quad (x^* \text{ partie "oscillante" de } x)$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\frac{3 A^2}{4} - 1}, \quad A^3 - \frac{4}{3} A - \frac{4}{3} = 0. \quad (7)$$

D'où l'existence de trois solutions périodiques possibles.
Nous ne donnons que la solution correspondant à la valeur :

$$\underline{A = 1,49275}$$

La solution du système (3) s'écrit alors :

$$\underline{x = 1,49275 \sin t} \quad (8)$$

B) Application de la méthode préposée

$$\ddot{x} + \frac{3 A^2}{4} x = \sin t + \left(\frac{3 A^2}{4} x - x^3 \right) . \quad (9)$$

Le système linéaire équivalent s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y} + \omega_0^2 y &= \sin t + F(y) , \\ \ddot{y} + \omega_1^2 y &= \sin t , \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

avec $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{F_n(y)}{y}$
 $\omega_0^2 = \frac{3}{4} A^2 .$

Nous poserons : $\frac{1}{\omega_1^2 - 1} = a . \quad (11)$

La solution de (10) s'écrit :

$$y = a \sin t = \frac{1}{\omega_1^2 - 1} \sin t . \quad (12)$$

Première approximation

$$\ddot{G}_1 + \frac{3 A^2}{4} G_1 = f(y) = \frac{3 A^2}{4} a \sin t - \frac{a^3}{4} (3 \sin t - \sin 3 t) - F_1(y) \quad (13)$$

Tous calculs faits :

$$\left. \begin{aligned} F_1(y) &= \frac{3}{4} (A^2 - a^2) y , \\ G_1 &= \frac{a^3}{4 (\omega_0^2 - 9)} \sin 3 t . \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

En deuxième approximation on obtient

$$\ddot{G}_2 + \frac{3 A^2}{4} G_2 = \frac{\partial f}{\partial y} G_1 - F_2(y) \quad (15)$$

Tous calculs effectués on trouve :

$$\left. \begin{aligned} F_2(y) &= \frac{3 a^4}{16(\omega_0^2 - 9)} y, \\ G_2 &= \left(\frac{3 A^2}{4} - \frac{3 a^2}{2} \right) \frac{a^3 \sin 3 t}{4(\omega_0^2 - 9)^2} + \frac{3 a^5 \sin 5 t}{16(\omega_0^2 - 9)(\omega_0^2 - 25)} \end{aligned} \right\} (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_1^2 &= \omega_0^2 - \frac{F(y)}{y} = \frac{3 A^2}{4} - \frac{3 A^2}{4} + \frac{3 a^2}{4} - \frac{3 a^4}{16(\omega_0^2 - 9)} \\ \text{Soit :} \\ \omega_1^2 &= \frac{3 a^2}{4} \left[1 - \frac{a^2}{4(\omega_0^2 - 9)} \right] \end{aligned} \right\} (17)$$

La solution x est donc déterminée non seulement à partir du fondamental comme dans le cas précédent (§ A), mais avec les harmoniques d'ordres supérieurs.

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sin t + U \sin 3 t + V \sin 5 t \\ x &= y + G_1 + G_2 \end{aligned} \right\}$$

Calcul des coefficients

L'amplitude A est déterminée à partir de la connaissance des maximums et minimums de la fonction x .

Soit β et α ces maximums et minimums :

$$\text{On a : } A = \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Si l'on s'arrête à la première approximation :

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sin t + U \sin 3 t, \\ x &= a \sin t + \frac{a^3}{4(\omega_0^2 - 9)} \sin 3 t. \end{aligned} \right\}$$

La fonction étant impaire, l'étude se fera dans l'intervalle $[0, \pi]$

$$\dot{x} = a \cos t + \frac{3 a^3}{4 (\omega_0^2 - 9)} \cos 3 t ,$$

$$\text{s'annule pour } t = \begin{cases} \pi/2 , \\ -\pi/2 , \\ \cos t = \pm \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{(\omega_0^2 - 9)}{3 a^2}} . \end{cases}$$

La valeur du maximum sera trouvée pour $t = \pi/2$, à la condition que $\omega_0^2 - 9$ soit < 0 .

On suppose cette condition réalisée, et lorsque nous aurons les valeurs de a et A nous vérifierons qu'elle l'est effectivement.

Pour $t = \pi/2$,

$$x = a + \frac{a^3}{4 B} , \quad B = \omega_0^2 - 9 , \quad \text{et} \quad \begin{cases} \omega_0^2 - 9 < 0 , \\ \frac{3 A^2}{4} - 9 < 0 . \end{cases}$$

d'où :

$$\left. \begin{aligned} A &= a - \frac{a^3}{4 \left(\frac{3}{4} A^2 - 9 \right)} & (18 - a) \\ \omega_1^2 &= \frac{3}{4} a^2 - \frac{3 a^4}{16 \left(\frac{3}{4} A^2 - 9 \right)} & (18 - b) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Du système précédent on déduit :

$$\omega_1^2 = \frac{3}{4} a A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{4 \omega_1^2}{3 a}$$

en reportant cette valeur de A (18 - a) et en posant $a = \frac{1}{\omega_1^2 - 1}$, on trouve l'équation en ω_1 de la forme :

$$64(\omega_1^2 - 1)^6 \omega_1^6 - (\omega_1^2 - 1)^4 \left[48 \omega_1^4 + 432 \omega_1^2 \right] + 324 (\omega_1^2 - 1)^2 + 9 = 0 \quad (19)$$

La résolution de ce système nous donne la valeur de ω_1 .

Le plus simple étant quand même, d'effectuer un programme, permettant de rechercher pour la solution x , la valeur des maximums et des minimums, en annulant la dérivée de x .

De même a est calculé à partir de l'équation (12) en remplaçant ω_1^2 par la valeur trouvée en deuxième approximation (17).

[Pour plus de détails sur le calcul dans le programme, se rapporter à l'étude de l'équation (II - 8) :

$$\ddot{x}(t) - 0,1 \ddot{x}(t-1) + 0,1 \dot{x}(t) + x^3(t-1) = \sin t.]$$

En deuxième approximation, tous calculs faits nous trouvons :

$$\left. \begin{aligned} x &= y + G_1 \\ x &= a \sin t + \frac{a^3}{4(\omega_0^2 - 9)} \sin 3t. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

d'où en valeurs numériques :

$$x = 1,4498089 \sin t - 0,1057576525 \sin 3t. \quad (21)$$

Troisième approximation :

$$\ddot{G}_3 + \frac{3}{4} A^2 G_3 = \left[\frac{\partial f}{\partial y} G_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} G_1^2 \right] - F_3(y). \quad (22)$$

Avec :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3}{4} A^2 - 3y^2, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -3y.$$

On ne gardera que les termes linéaires en y , pour le calcul de $F_3(y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} G_2 = \left(\frac{3}{4} A^2 - 3a^2 \sin^2 t \right) \cdot \left(\frac{3A^2}{4} - \frac{3a^2}{2} \right) \frac{a^3 \sin 3t}{4(\omega_0^2 - 9)} + \frac{3a^5 \sin 5t}{16(\omega_0^2 - 9)(\omega_0^2 - 25)}$$

D'où les termes linéaires en y :

$$\frac{3 \left(\frac{3A^2}{4} - \frac{3a^2}{2} \right) a^5 \sin t}{16(\omega_0^2 - 9)} = \frac{3 \left(\frac{3A^2}{4} - \frac{3a^2}{2} \right) a^4}{16(\omega_0^2 - 9)} y.$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} X G_1^2 = - 3 a \sin t \cdot \frac{a^6}{16(\omega_0^2 - 9)^2} \sin^2 3 t ,$$

$$\Rightarrow \frac{- 3 a^7}{32(\omega_0^2 - 9)^2} \sin t = \frac{- 3 a^6}{32(\omega_0^2 - 9)^2} y .$$

d'où ω_1^2 en troisième approximation :

$$\omega_1^2 = \frac{3}{4} a^2 - \frac{3 a^4}{16(\omega_0^2 - 9)} - \frac{3 a^4 (\frac{3}{4} A^2 - \frac{3}{4} a^2)}{16(\omega_0^2 - 9)^2} + \frac{3 a^6}{32(\omega_0^2 - 9)^2} . (23)$$

Dans le programme (pages 67 ter et 67 quater)

a est calculé, à partir de l'équation (12) en remplaçant ω_1^2 par sa valeur en troisième approximation, par la méthode de Newton.

A est calculé en recherchant les extremums de x (à partir de sa dérivée).

de plus : $x = y + G_1 + G_2$,

$$x = a \sin t + \frac{a^3}{4(\omega_0^2 - 9)} \sin 3 t + \frac{(\frac{3}{4} A^2 - \frac{3}{2} a^2)}{4(\omega_0^2 - 9)^2} a^3 \sin 3 t + \frac{3 a^5 \sin 5 t}{16(\omega_0^2 - 9)(\omega_0^2 - 25)}$$

$$A(I) = x , \quad C = \omega_1 , \quad F = a , \quad E = A , \quad y = \dot{x}$$

Lignes 50 à 320	recherche des racines (calcul de A)
Lignes 540 à 780	classement des racines,
Lignes 333 à 343	calcul de <u>a</u> (méthode de Newton),
Lignes 344 à 347	autres coefficients.

d'où tous calculs faits on trouve en troisième approximation :

$$x = 1,436940825 \sin t - 0,121774237 \sin 3 t + 6,92398 \cdot 10^{-3} \sin 5 t . (24)$$

Les valeurs trouvées numériquement par M^r URABE [19] sont :

$$x = 1,431189 \sin t - 0,126915 \sin 3 t + 0,009754 \sin 5 t . (25)$$

(Pour un développement de la solution jusqu'au 15^{ème} harmonique)

- M. VAN DOOREN a donné lui aussi une solution analytique de cette équation. Nous donnons sous forme de tableau ses résultats en troisième approximation, notre calcul (aussi en troisième approximation), ainsi que les résultats numériques de M. URABE.

	a_1	a_2	C_2	a_3	C_3
$\sin t$	1,431189	1,436940825	0,4%	1,438508632	0,5 %
$\sin 3 t$	0,126915	0,121774237	4 %	0,126220070	0,5 %
$\sin 5 t$	0,009754	$6,92398 \times 10^{-3}$	25%	0,008866213	10 %

$a_1 \longrightarrow$ coefficients des $\sin n t$ par la méthode numérique,

$a_2 \longrightarrow$ coefficients des $\sin n t$ par notre méthode,

$a_3 \longrightarrow$ coefficients des $\sin n t$ par la méthode de Van Dooren.

$$C_2 = \frac{a_1 - a_2}{a_1} , \quad C_3 = \frac{a_1 - a_3}{a_3} .$$

Conclusion

L'on constate une erreur moins importante pour la méthode de M. Van Dooren, que pour la notre, à un même stade d'approximation, (sauf dans le cas du fondamental).

Cela provient certainement du fait, que nous avons une convergence moins rapide pour les termes d'harmoniques supérieurs, que par la méthode de Van Dooren.

Seulement, l'on pourra constater dans d'autres exemples qu'il n'en est pas toujours ainsi, et que notre méthode donne des résultats améliorés par rapport à ceux de Van Dooren.

Programme pour l'équation :

$$\ddot{x} + x^3 = \sin t.$$

```

10  DIM A [10]
20  DISP 'MU';
30  INPUT M
40  GOTO 360
50  I=X0=0
60  X2=2*PI
70  X1=PI/10
80  X=X0
90  GOSUB 330
100  YO=Y
110  XO=X
120  IF YO=0 THEN 250
130  X=X+X1
140  IF X>X2 THEN 320
150  GOSUB 330
160  IF Y*YO>= 0 THEN 100
170  XO=X
180  X3=X1
190  X3=X3*Y/(YO-Y)
200  X=X+X3
210  IF ABS(X3/X) <= 1E-06 THEN 250
220  YO=Y
230  GOSUB 330
240  GOTO 190
250  GOTO 260
260  I=I+1
270  GOTO 280
280  A [I] =F*SINX+B1*(1+3*(E+2-2*F+2)/(3*E+2-36))*SIN(3*X)
281  A [I] =A [I] +3*F+2*B1*SIN(5*X)/(3*E+2-100)
300  XO=X0+X1
310  GOTO 80
320  RETURN
330  Y=F*COSX+3*B1*(1+3*(E+2-2*F+2)/(3*E+2-36))*COS(3*X)
331  Y=Y+15*F+2*B1*COS(5 X)/(3*E+2-100)
350  RETURN
360  D=0
362  E=1.5
365  F=1.5
380  G2=6*F+7/(3*E+2-36)+2-3*F+5*(1+3*E+2/(3*E+2-36))/(4*(3*E+2-36))
382  G2=G2+3*F+3/4-F-1
391  G3=42*F+6/(3 E+2-36)+2-15*F+4*(1+3*E+2/(3*E+2-36))/(4*(3+E*2-36))
392  G3=G3+9 F+2/4-1
393  H=-G2/G3
394  IF ABS(H/F) <= 1E-06 THEN 397
395  F=F+H
396  GOTO 380
397  B1=F+3/(3*E+2-36)
400  C1=6*F+6/(3*E+2-36)+2-3*F+4*(1+3*E+2/(3*E+2-36))/(4*(3*E+2-36))+3*F+2/4
401  C=SQR C1
403  B2=B1*(1+3*(E+2-2*F+2)/(3*E+2-36))
550  GOSUB 50
560  A1=AO=A [1]
570  FOR J=2 TO I
580  IF A [J]> AO THEN 610
590  IF A [J]< A1 THEN 630
600  GOTO 640

```


- 67 quater -

Suite du programme de l'équation : $\ddot{x} + x^3 = \sin t$

```
610  AO=A  [J]
620  GOTO 640
630  A1=A  [J]
640  NEXT  [J]
650  E1=(AO-A1)/2
651  D2=(AO+A1)/2
670  IF ABS(E1-E)+ABS(D2-D)>1E-03 THEN 690
680  STOP
690  E=E1
692  D=D2
710  PRINT 'E='E;'F='F;'D='D;'C='C;'B1='''B1;'B2='B2
720  GOTO 380
730  END
```


II - 5 - ETUDE DE L'EQUATION :

$$\ddot{x} + 0,2 \dot{x} + x^3 = 0,3 \cos t . \quad (1)$$

A) Le développement du terme non linéaire de l'équation (1) en polynômes orthogonaux nous donne :

$$\left. \begin{aligned} x^3 &= a_1 P_1(x/A) + a_3 P_3(x/A) , \\ x^3 &= \frac{3}{4} A^2 x + x^3 - \frac{3}{4} A^2 x . \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Si l'on considère la solution obtenue à partir du premier terme du développement en polynômes orthogonaux l'on obtient :

$$\ddot{x} + 0,2 \dot{x} + \frac{3}{4} A^2 x = 0,3 \cos t . \quad (3)$$

$$\text{soit la solution } x = \frac{0,3 \cos(t - \alpha)}{\left[\left(\frac{3}{4} A^2 - 1 \right)^2 + 0,2^2 \right]^{1/2}} = A \cos(t - \alpha) \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{avec, } \sin \alpha &= \frac{0,2}{\left[\left(\frac{3}{4} A^2 - 1 \right)^2 + 0,2^2 \right]^{1/2}} , \\ \cos \alpha &= \frac{\frac{3}{4} A^2 - 1}{\left[\left(\frac{3}{4} A^2 - 1 \right)^2 + 0,2^2 \right]^{1/2}} . \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\text{de (4) on déduit : } A = \frac{0,3}{\left[\left(\frac{3}{4} A^2 - 1 \right)^2 + 0,2^2 \right]^{1/2}} \quad (6)$$

$$\Rightarrow \frac{9 A^6}{16} - \frac{3 A^4}{2} + 1,04 A^2 - 0,3^2 = 0 \quad (7)$$

La résolution de l'équation (7) nous donne trois racines :

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 0,317413327 , \\ A_2 &= 1,232246019 , \\ A_3 &= 1,023551557 . \end{aligned} \right\} (8)$$

$$x = A \cos t \cos \alpha + A \sin t \sin \alpha .$$

On obtient successivement :

Pour A_1 :

$$x = -0,3099738701 \cos t + 0,0670528378 \sin t . \quad (9)$$

Pour A_2 :

$$x = 0,7026418925 \cos t + 1,012286828 \sin t . \quad (10)$$

Pour A_3 :

$$x = 0,7482255134 \cos t + 0,698438520 \sin t . \quad (11)$$

Tous ces résultats ont été comparés avec les travaux de M. HAYASHI, qui a proposé une étude numérique de cette équation.

Ses résultats sont les suivants :

$$\left. \begin{aligned} x &= -0,310 \cos t + 0,067 \sin t . \rightarrow \text{correspondant à } A_1 \\ x &= 0,702 \cos t + 1,012 \sin t . \rightarrow \text{correspondant à } A_2 \\ x &= 0,748 \cos t + 0,699 \sin t . \rightarrow \text{correspondant à } A_3 . \end{aligned} \right\} (12)$$

B) Application de la méthode proposée

$$\ddot{x} + 0,2 \dot{x} + \frac{3}{4} A^2 x = 0,3 \cos t - (x^3 - \frac{3}{4} A^2 x) . \quad (13)$$

Le système équivalent s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y} + 0,2 \dot{y} + \frac{3}{4} A^2 y &= 0,3 \cos t + F_n(y, \dot{y}) \\ \text{ou encore :} \\ \ddot{y} + B\dot{y} + \omega_1^2 y &= 0,3 \cos t . \end{aligned} \right\} (14)$$

$F(y, \dot{y})$ étant linéaire en y et $\dot{y}$ on peut écrire $F_n(y, \dot{y}) = b_n y + d_n \dot{y}$

$$\left. \begin{aligned} d'où \quad B_n &= 0,2 - d_n \\ \omega_1^2 &= \frac{3}{4} A^2 - b_n \end{aligned} \right\} \quad (14\text{-bis})$$

La solution s'écrit :
$$y = \frac{0,3 \cos(t - \alpha)}{\left[(\omega_1^2 - 1)^2 + B_n^2 \right]^{1/2}} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{B_n}{\left[(\omega_1^2 - 1)^2 + B_n^2 \right]^{1/2}} , \\ \cos \alpha &= \frac{\omega_1^2 - 1}{\left[(\omega_1^2 - 1)^2 + B_n^2 \right]^{1/2}} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

avec

On posera $\underline{a} = \frac{0,3}{\left[(\omega_1^2 - 1)^2 + B_n^2 \right]^{1/2}} .$

Première approximation :

$$\ddot{G}_1 + 0,2 \dot{G}_1 + \frac{3}{4} A^2 G_1 = f(y, \dot{y}) - F_1(y, \dot{y}) \quad (17)$$

$$y = a \cos(t - \alpha) = a \cos \psi \quad \text{avec } \psi = t - \alpha$$

Tous calculs faits on trouve :

$$\left. \begin{aligned} F_1(y, \dot{y}) &= - \frac{3 a^3}{4} \cos \psi + \frac{3 A^2}{4} a \cos \psi = \left(- \frac{3 a^2}{4} + \frac{3 A^2}{4} \right) y ; \\ d'où \omega_1^2 &= - \frac{3 A^2}{4} + \frac{3 a^2}{4} + \frac{3 A^2}{4} = \frac{3 a^2}{4} . \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

La solution de l'équation (17) devient :

$$G_1 = - \frac{a^3 \cos 3(t - \alpha - \delta)}{4 \left[\left(\frac{3A^2}{4} - 9 \right)^2 + 9(0,2)^2 \right]^{1/2}} \quad (19)$$

Posons :

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= - \frac{a^3}{4 \left[\left(\frac{3A^2}{4} - 9 \right)^2 + 9(0,2)^2 \right]^{1/2}} \\ \text{et } D_2 &= 4 \left[\left(\frac{3A^2}{4} - 9 \right)^2 + 9(0,2)^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow G_1 = D_1 \cos 3(t - \alpha - \delta)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} \cos 3\delta &= \frac{\frac{3A^2}{4} - 9}{D_2} , \\ \sin 3\delta &= \frac{0,6}{D_2} . \end{aligned} \right\}$$

En deuxième approximation nous avons :

$$\ddot{G}_2 + 0,2 \dot{G}_1 + \frac{3A^2}{4} G_2 = \left[\frac{\partial f}{\partial y} G_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{G}_1 \right] - F_2(y, \dot{y}) \quad (20)$$

$$\text{avec } \frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2 + \frac{3A^2}{4} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 .$$

Tous calculs faits on a :

$$F_2(y, \dot{y}) = - \frac{3aD_1}{4} \cos 3\delta y + \frac{3aD_1}{4} \sin 3\delta \dot{y} \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow \omega_1^2 &= \frac{3a^2}{4} + \frac{3aD_1}{4} \cos 3\delta , \\ B_2 &= 0,2 - \frac{3aD_1}{4} \sin 3\delta . \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

La solution x s'écrit alors :

$$x = a \cos (t - \alpha) + D_1 \cos 3(t - \alpha) \cos 3\delta + D_1 \sin 3(t - \alpha) \sin 3\delta . \quad (23)$$

Calcul de a .

On arrête en deuxième approximation et l'on reporte les valeurs de (22) dans l'équation en a :

$$a = \frac{0,3}{\left[(\omega_1^2 - 1)^2 + B^2 \right]^{1/2}} . \quad (24) \quad (\text{équation du } 10^{\text{ème}} \text{ degré en } a)$$

Suivant les conditions initiales, le programme nous donnera trois solutions périodiques possibles, comme dans le cas du § A.

Le cas étudié correspond à celui donné pour A_1 .

Nos résultats numériques sont les suivants :

$$\begin{aligned} a &= 0,317225302 , \\ \sin \alpha &= 0,211497322 , \\ \cos \alpha &= 0,977378577 , \\ \sin 3\delta &= 0,067413858 , \\ \cos 3\delta &= - 0,997725098 . \end{aligned}$$

La solution en deuxième approximation est donc :

$$\begin{aligned} x = & - 0,3100492143 \cos t + 0,0670923018 \sin t \\ & - 6,78535177 \cdot 10^{-4} \cos 3t + 5,8116586 \cdot 10^{-4} \sin 3t \end{aligned}$$

D) Extension

L'on remarquera, que dans tous les calculs faits précédemment, nous adoptions au préalable, comme forme de solution initiale $x = Ax^*$, (A amplitude de la solution, x^* partie oscillante de cette même solution), c'est-à-dire une symétrie entre les maximums et minimums (β et α) de cette solution.

Or, à priori, à part pour certaines fonctions dont la **parité** est connue, rien ne justifie cette forme, et la solution doit s'écrire :

$$x = Ax^* + D \quad \text{où} \quad : \quad D = \frac{\beta + \alpha}{2} , \quad A = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

Seulement tous les calculs numériques, validaient sur cet exemple la faible valeur de D (souvent $< 10^{-10}$), donc la forme en $x = Ax^*$.

Supposons que nous adoptions, la solution sous la forme :

$$x = Ax^* + D. \quad (26) \implies x^* = \frac{x - D}{A} \quad (26 - \text{bis})$$

L'équation (1) devient :

$$\ddot{x} + 0,2 \dot{x} + (Ax^* + D)^3 = 0,3 \cos t. \quad (27)$$

$$(Ax^* + D)^3 = A^3 x^{*3} + 3A^2 x^{*2} D + 3Ax^* D^2 + D^3$$

$$x^{*3} = \frac{3}{4} x^{*2} + x^{*3} - \frac{3}{4} x^{*2}$$

$$x^{*2} = \frac{1}{2} + (x^{*2} - 1/2)$$

L'équation (27) peut s'écrire :

$$\ddot{x} + 0,2 \dot{x} + \frac{3A^3}{4} x^{*3} + 3AD^2 x^{*2} + \frac{3A^2 D}{2} + D^3 = -A^3 \left(x^{*3} - \frac{3x^{*2}}{4} \right) - 3A^2 D \left(x^{*2} - \frac{1}{2} \right). \quad (28)$$

En revenant aux x (28) s'écrit :

$$\ddot{x} + 0,2 \dot{x} + \left[\frac{3A^2}{4} + 3D^2 \right] x + \frac{3A^2 D}{4} - 2D^3 = \frac{3}{4} (x-D)A^2 - (x-D)^3 + \frac{3A^2 D}{4} - 3(x-D)^2 D. \quad (29)$$

A partir de l'équation (29) on applique la méthode de linéarisation équivalente :

$$\text{On appelle } \frac{3A^2 D}{4} - 2D^3 = K_1$$

Le système linéaire équivalent de (29) s'écrit :

$$\ddot{y} + 0,2 \dot{y} + \left[\frac{3A^2}{4} + 3D^2 \right] y + K_1 = 0,3 \cos t + F_n(y, \dot{y}), \quad (30)$$

$$\text{Soit : } \ddot{y} + B_n \dot{y} + \omega_{1,n}^2 y = 0,3 \cos t - K_1. \quad (31)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{avec } B_n &= 0,2 - \frac{F_n(\dot{y})}{\dot{y}}, \\ \omega_{1,n}^2 &= \left[\frac{3A^2}{4} + 3D^2 \right] - \frac{F_n(y)}{y}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

La solution étant de la forme :

$$y = \frac{0,3 \cos(t - \alpha)}{\left[(\omega_{1,n}^2 - 1)^2 + B^2 \right]^{1/2}} - \frac{K_1}{\omega_{1,n}^2}, \quad (33)$$

$$y = a \cos(t - \alpha) - \frac{K_1}{\omega_{1,n}^2}, \quad \text{avec } a = \frac{0,3}{\left[(\omega_{1,n}^2 - 1)^2 + B^2 \right]^{1/2}}.$$

Soit pour la première approximation :

$$\ddot{G}_1 + 0,2 \dot{G}_1 + \left[\frac{3A^2}{4} + 3D^2 \right] G_1 = f(y, \dot{y}) - F_1(y, \dot{y}). \quad (34)$$

$$\text{avec } f(y, \dot{y}) = \frac{3}{4} (y-D)A^2 - (y-D)^3 + \frac{3A^2D}{2} - 3(y-D)^2 D$$

$$y = a \cos(t - \alpha) - \frac{K_1}{\omega_{1,1}^2} = a \cos \psi - \frac{K_1}{\omega_{1,1}^2}$$

on posant $(t - \alpha) = \psi$

D'où après différents calculs et diverses simplifications on trouve :

$$\begin{aligned} f(y, \dot{y}) = & -\frac{3a^2}{4} \left[a \cos \psi - \frac{K_1}{\omega_{1,1}^2} \right] + \frac{3a^2 K_1}{4 \omega_{1,1}^2} - \frac{a^3}{4} \cos 3\psi \\ & + \frac{3a^2 K_1}{\omega_{1,1}^2} \cos 2\psi - 3 \left(\frac{K_1}{\omega_{1,1}^2} \right)^2 \left[a \cos \psi - \frac{K_1}{\omega_{1,1}^2} + \frac{2}{3} \frac{K_1}{\omega_{1,1}^2} \right] \\ & + \left(\frac{3A^2}{4} + 3D^2 \right) \left[a \cos \psi - \frac{K_1}{\omega_{1,1}^2} \right] + \frac{3A^2D}{4} - 2D^3. \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
 \text{D'où } F_1(y, \dot{y}) &= - \frac{3 a^2}{4} - 3 \left(\frac{K_1}{\omega_{1,1}^2} \right)^2 + \left(\frac{3 A^2}{4} + 3 D^2 \right) \\
 \implies \omega_{1,1}^2 &= \frac{3 a^2}{4} + 3 \left(\frac{K_1}{\omega_{1,1}^2} \right)^2
 \end{aligned}
 \tag{36}$$

On rappelle que $K_1 = \frac{3 A^2 D}{4} - 2 D^3$, d'où si D est faible on retrouve l'approximation donnée ⁴ au § B.

Mais dans certains cas, la valeur de D peut ne plus être très faible, ce qui implique dans le terme G_1 , l'apparition de termes d'harmoniques pairs.

$$\ddot{G}_2 + 0,2 \dot{G}_1 + \left[\frac{3A^2}{4} + 3D^2 \right] G_1 = - \frac{a^3}{4} \cos 3\psi + \left[\frac{3a^2 K_1}{2\omega_{1,1}^2} \cos 2\psi \right] + K_2 \tag{37}$$

avec $K_2 = \frac{3 a^2 K_1}{4 \omega_{1,1}^2} - 2 \left(\frac{K_1}{\omega_{1,1}^2} \right)^3 + \frac{3 A^2 D}{4} - 2 D^3$

Ces termes d'harmoniques pairs avaient déjà été trouvés par M. ARGEMI et JURICIC dans leurs travaux sur les équations de DUFFING [22].

L'on voit donc ici un intérêt supplémentaire de la méthode proposée, puisque qu'aucune méthode de perturbation classique, ne peut faire apparaître ces différents termes, (d'ordre pair).

Conclusion

Il est difficile sur cet exemple de donner des pourcentages d'erreurs de notre méthode par rapport aux valeurs numériques, car le nombre de chiffres significatifs est trop peu important.

L'on peut seulement constater la bonne concordance entre ces deux méthodes.

Par contre HAYASHI [11] nous donne pour l'équation (1) les résultats trouvés par la méthode des perturbations et par la méthode de la balance harmonique.

Par le tableau suivant, on donne les coefficients des différentes harmoniques (ordre 3) pour les quatres méthodes.

Tous les calculs (sauf pour la méthode numérique) sont donnés en deuxième approximation.

	a_1	a_2	C_2	a_4	C_4	a_5	C_5
$\cos t$	- 0,310	- 0,3100	0%	- 0,310	0%	-0,310	0%
$\sin t$	0,0670	0,0670	0%	0,0670	0%	0,0670	0%
$\cos 3t$	-0,0007	- 6,785.10 ⁻⁴	3%	- 0,001	42%	- 001	42%
$\sin 3t$	0,0004	5,81.10 ⁻⁴	40%	0,001	150%	0,001	150%

a_1 : coefficients des $\cos t$, $\sin t$, $\cos 3 t$, $\sin 3 t$ par la méthode numérique,

a_2 : coefficients des $\cos t$, $\sin t$, $\cos 3 t$, $\sin 3 t$ par notre méthode,

a_4 : coefficients des $\cos t$, $\sin t$, $\cos 3 t$, $\sin 3 t$ par la méthode des perturbations,

a_5 : coefficients des $\cos t$, $\sin t$, $\cos 3 t$, $\sin 3 t$ par la méthode de la balance harmonique.

$$C_2 = \frac{a_1 - a_2}{a_1} \quad C_4 = \frac{a_1 - a_4}{a_1} \quad C_5 = \frac{a_1 - a_5}{a_4}$$

II - 6 - ETUDE DE L'EQUATION DE VAN DER POL FORCÉE

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = \mu \sin t . \quad (1)$$

A) Le développement en polynômes orthogonaux du terme non linéaire x^2 donne :

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= a_0 P_0(x/A) + a_2 P_2(x/A) , \\ x^2 &= \frac{A^2}{2} + x^2 - \frac{A^2}{2} . \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Equation différentielle obtenue, en ne gardant que le premier terme du développement :

$$\ddot{x} + \mu \left(\frac{A^2}{2} - 1 \right) \dot{x} + x = \mu \sin t . \quad (3)$$

Soit une solution de la forme : $x = \frac{\sin(t - \alpha)}{\left(\frac{A^2}{2} - 1 \right)}$

$$x = A x^* \quad \text{avec} \quad A = \frac{1}{\frac{A^2}{2} - 1} . \quad (5)$$

$$\Rightarrow A^3 - 2A - 2 = 0 , \quad \text{d'où} \quad A = 1,76929235 . \quad (6)$$

$$x = 1,76929235 \left[\cos \alpha \sin t - \cos t \sin \alpha \right] .$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{\left(\frac{A^2}{2} - 1 \right)}{\left(\frac{A^2}{2} - 1 \right)} = 1 , \\ \cos \alpha &= 0 . \end{aligned} \right\} \quad (7) \Rightarrow \underline{x = -1,76929235 \cos t} . \quad (8)$$

B) Méthode proposée

$$\ddot{x} + \mu \left(\frac{A^2}{2} - 1 \right) \dot{x} + x = \mu \sin t + \mu \left(\frac{A^2}{2} - x^2 \right) \dot{x} . \quad (9)$$

Système linéaire équivalent :

$$\left. \begin{aligned} y + \mu \left(\frac{A^2}{2} - 1 \right) \dot{y} + y &= \mu \sin t + \mu F_n(y, \dot{y}) , \\ \ddot{y} + B_n \dot{y} + \omega_1^2 y &= \mu \sin t . \\ F_n(y, \dot{y}) \text{ linéaire en } y \text{ et } \dot{y} &\text{ peut s'écrire : } b_n y + d_n \dot{y} \\ \text{d'où : } B_n &= \mu \left(\frac{A^2}{2} - 1 \right) - \mu d_n , \\ \omega_1^2 &= 1 - \mu b_n . \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

La solution en y s'écrit $y = \frac{\mu \sin(t - \alpha)}{\left[(\omega_1^2 - 1)^2 + B_n^2 \right]^{1/2}} . \quad (11)$

On pose : $a = \frac{\mu}{\left[(\omega_1^2 - 1)^2 + B_n^2 \right]^{1/2}} .$

$$\left. \begin{aligned} \text{et l'on a : } \sin \alpha &= \frac{a B_n}{\mu} \\ \cos \alpha &= \frac{a}{\mu} (\omega_1^2 - 1) \end{aligned} \right\}$$

Première approximation

$$\ddot{G}_1 + \mu \left(\frac{A^2}{2} - 1 \right) \dot{G}_1 + G_1 = f(y, \dot{y}) - \mu F_n(y, \dot{y}) . \quad (12)$$

avec $f(y, \dot{y}) = \mu \left(\frac{A^2}{2} - y^2 \right) \dot{y}$

Tous calculs faits on obtient :

$$\left. \begin{aligned} F_1(y, \dot{y}) &= \mu \left(\frac{A^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \dot{y} \Rightarrow B_1 = \mu \left(\frac{A^2}{2} - 1 - \frac{A^2}{2} + \frac{a^2}{4} \right) = \mu \left(\frac{a^2}{4} - 1 \right) \\ G_1 &= \frac{\mu a^3 \cos 3(t - \alpha - \delta)}{4 \left[64 + 9 \mu^2 \left(\frac{A^2}{2} - 1 \right)^2 \right]^{1/2}} . \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

On pose $D_1 = \frac{\mu a^3}{4 \left[64 + 9 \mu^2 \left(\frac{A^2}{2} - 1 \right)^2 \right]^{1/2}} .$

$$\left. \begin{aligned} \text{et l'on a : } \cos 3 \delta &= - \frac{32 D_1}{\mu a^3} , \\ \sin 3 \delta &= \frac{12 \left(\frac{A^2}{2} - 1 \right) D_1}{a^3} . \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

La deuxième approximation nous donne :

$$\ddot{G}_2 + \mu \left(\frac{A^2}{4} - 1 \right) \dot{G}_2 + G_2 = \mu \left[\frac{\partial f}{\partial y} G_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{G}_1 \right] - \mu F_2(y, \dot{y}) \quad (15)$$

On obtient :

$$F_2(y, \dot{y}) = \frac{\mu a D_1}{4} \sin 3 \delta \dot{y} - \frac{\mu D_1 a \cos 3 \delta}{4} y . \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{d'où : } B_2 &= \mu \left[\frac{a^2}{4} - 1 - \frac{a D_1}{4} \sin 3 \delta \right] , \\ \omega_1^2 &= 1 + \frac{\mu D_1 a}{4} \cos 3 \delta . \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Calcul des différents coefficients :

En deuxième approximation on a :

$$a = \left[\left(\frac{D_1 a \cos 3 \delta}{4} \right)^2 + \left(\frac{a^2}{4} - 1 - \frac{a D_1 \sin 3 \delta}{4} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

En remplaçant D_1 , $\cos 3 \delta$ et $\sin 3 \delta$ (14) par les valeurs respectives nous obtenons une équation du 10^{ème} degré en a.

Dans le programme a est calculé par la méthode de Newton.

A est déterminé par l'amplitude de la solution x

$$\left. \begin{aligned} x &= y + G_1 , \\ x &= a \sin(t - \alpha) + D_1 \cos 3(t - \alpha - \delta) . \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Application numérique

Nos résultats sont comparés avec les travaux de M. URABE sur cette même équation. [22] , tel que $\mu = 0,1$.

On trouve :

$$a = 2,383113579 \quad , \quad \omega_1 = 0,998741068 \quad , \quad A = 2,384890598 \quad .$$

D'où la solution :

$$\begin{aligned} x = & - 2,378823005 \cos t - 0,1429386 \sin t - 0,004677864496 \cos 3 t \\ & + 0,0419648134 \sin 3 t \end{aligned} \quad (20)$$

Les résultats numériques de M.URABE donnent :

$$\begin{aligned} x = & - 2,378785902 \cos t - 0,142330099 \sin t - 0,004646924 \cos 3 t \\ & + 0,041867539 \sin 3 t. \end{aligned}$$

Nous avons pu aussi comparer ces résultats, avec ceux de M. VAN DOOREN appliquant lui aussi pour cette équation une méthode analytique [20] .

- Les résultats de sa deuxième approximation donnent :

$$\begin{aligned} x_3 = & - 2,2829758 \cos t - 0,1430565 \sin t + 0,0422871 \sin 3 t \\ & - 0,0046991 \cos 3 t . \end{aligned}$$

- Les résultats de sa troisième approximation sont les suivants :

$$\begin{aligned} x_4 = & - 2,3787457 \cos t - 0,1430565 \sin t + 0,0418623 \sin 3 t \\ & - 0,0046991 \cos 3 t . \end{aligned}$$

L'on peut constater que les termes en $\sin t$ et $\cos 3 t$ ne varient pas d'une approximation à l'autre.

Conclusion

Nous comparons les coefficients des différents harmoniques dans les trois cas :

Soit sous forme de tableau ,

	a_1	a_2	C_1	a_3	C_2
cos t	2,378785902	2,3829758	0,17%	2,378823005	0,015%
sin t	0,14233009	0,1430565	0,5%	0,1429386	0,4%
cos 3 t	0,00464692	0,004699	1,1%	0,00467786449	0,66%
sin 3 t	0,04186753	0,0422811	$\approx 1\%$	0,0419648134	0,23%

a_1 : coefficients par la méthode numérique des cos t, sin t, cos 3 t, sin 3 t

a_2 : coefficients par la méthode de M. Van Dooren des cos t, sin t, cos 3 t, sin 3 t (2ème approximation)

a_3 : coefficients donnés par notre méthode, des cos t, sin t, cos 3 t, sin 3 t (2ème approximation)

$$C_1 = \frac{a_1 - a_2}{a_1} , \quad C_2 = \frac{a_1 - a_3}{a_2}$$

Il est clair, sur cet exemple, que notre méthode donne des résultats meilleurs que ceux de la méthode de M. Van Dooren.

II - 7 - SOIT LE CAS DE DEUX EQUATIONS COUPLEES :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{Q}_1 + \left[Q_1 + 2 \cdot 10^{-\lambda} (Q_1^3 + 0,4 Q_1 Q_2^2) \right] &= 0,3 \cos(0,95 t) , \\ \ddot{Q}_2 + \left[Q_2 + 10^{-\lambda} (Q_2^3 + 1,5 Q_2 Q_1^2) \right] (1,05)^2 &= 0,1 \cos(0,95 t) . \end{aligned} \right\} (1)$$

A) On développe les termes non linéaires $Q_1^3, Q_1^2, Q_2^3, Q_2^2$ en polynômes orthogonaux.

$$\left. \begin{aligned} Q_1^3 &= a_1 P_1(Q_1/A) + a_3 P_3(Q_1/A) = \frac{3A^2}{4} Q_1 + \left[Q_1^3 - \frac{3A^2}{4} Q_1 \right] , \\ Q_1^2 &= a_0 P_0(Q_1/A) + a_2 P_2(Q_1/A) = \frac{A^2}{2} + \left[Q_1^2 - \frac{A^2}{2} \right] . \end{aligned} \right\} (2)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_2^3 &= \frac{3B^2}{4} Q_2 + \left[Q_2^3 - \frac{3B^2}{4} Q_2 \right] , & A = \text{amplitude de la solu-} \\ & & \text{tion en } Q_1 \\ Q_1^2 &= \frac{B^2}{2} + \left[Q_2^2 - \frac{B^2}{2} \right] . & B = \text{amplitude de la solu-} \\ & & \text{tion en } Q_2 . \end{aligned} \right\}$$

On introduit (2) dans (1) et l'on garde dans le membre gauche de l'équation, uniquement les termes linéaires en Q_1 et Q_2 , d'où (1) devient :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{Q}_1 + Q_1 \left[1 + \frac{3A^2}{2} + 0,4 B^2 \right] &= 0,3 \cos(0,95 t) + 2 \left(\frac{3A^2}{4} Q_1 - Q_1^3 \right) + 0,8 \left(\frac{B^2}{2} - Q_2^2 \right) , \\ \ddot{Q}_2 + Q_2 (1,05)^2 \left[1 + \frac{3B^2}{4} + \frac{1,5A^2}{2} \right] &= 0,1 \cos(0,95 t) + (1,05)^2 \left[\left[\frac{3B^2}{4} Q_2 - Q_2^3 \right] \right. \\ &\quad \left. + 1,5 Q_2 \left[\frac{A^2}{2} - Q_1^2 \right] \right] . \end{aligned} \right\} (3)$$

Nous n'avons plus introduit dans l'équation (3) le paramètre de non linéarité en $10^{-\lambda}$, car le seul exemple numérique intéressant que nous avons trouvé traité était pour $\lambda = 0$.

B) Linéarisation équivalente et application à la méthode proposée

On effectue les changements de variables : $Q_1 = y_1 + G_{1,n}$,

$$Q_2 = y_2 + G_{2,n} .$$

Le système linéaire équivalent peut donc s'écrire :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y}_1 + \beta_1 \dot{y}_1 &= h_1 \cos \omega t + F_{1,n}(y_1, y_2) , \\ \ddot{y}_2 + \beta_2 \dot{y}_2 &= h_2 \cos \omega t + F_{2,n}(y_1, y_2) . \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

et

$$\left. \begin{aligned} \ddot{G}_{1,n} + G_{1,n} &= f_1(y_1, y_2) - F_{1,n}(y_1, y_2) , \\ \ddot{G}_{2,n} + G_{2,n} &= f_2(y_1, y_2) - F_{2,n}(y_1, y_2) . \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Les deux équations différentielles linéaires du système (4) en y_1 et y_2 admettent toutes deux une solution harmonique de même pulsation ω . Si a_1 et a_2 sont les amplitudes de ces solutions, l'on peut écrire $a_1 = k_1 a_2$ ou inversement $a_2 = k_2 a_1$.

L'on pourra donc toujours mettre les termes linéaires $F_{1,n}(y_1, y_2)$ et $F_{2,n}(y_1, y_2)$ sous la forme :

$$F_{1,n}\left(y_1, \frac{y_1}{k_1}\right) = F_{1,n}(y_1) \quad \text{et} \quad F_{2,n}\left(\frac{y_2}{k_2}, y_2\right) = F_{2,n}(y_2)$$

Le système (4) devient donc :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y}_1 + \omega_{1,n}^2 y_1 &= h_1 \cos \omega t , \\ \ddot{y}_2 + \omega_{2,n}^2 y_2 &= h_2 \cos \omega t . \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\text{où} \quad \begin{cases} \omega_{1,n}^2 = \beta_1 - \frac{F_{1,n}}{y_1}(y_1) \\ \omega_{2,n}^2 = \beta_2 - \frac{F_{2,n}}{y_2}(y_2) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \beta_1 &= 1 + \frac{3A^2}{2} + 0,4 B^2 \\ \beta_2 &= \left[1 + \frac{3B^2}{4} + \frac{1,5A^2}{2} \right] (1,05)^2 \end{aligned}$$

$\omega = 0,95$, $h_1 = 0,3$, et $h_2 = 0,1$.

Les solutions du système (6) en y_1, y_2 s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{h_1 \cos \omega t}{\omega_{1,n}^2 - \omega^2} , & a_1 &= \frac{h_1}{\omega_{1,n}^2 - \omega^2} . \\ y_2 &= \frac{h_2 \cos \omega t}{\omega_{2,n}^2 - \omega^2} . & a_2 &= \frac{h_2}{\omega_{2,n}^2 - \omega^2} . \end{aligned} \right\} \quad \text{on pose :} \quad (7)$$

Première approximation

$$\left. \begin{aligned} \ddot{G}_{1,1} + \left(1 + \frac{3A^2}{2} + 0,4 B^2 \right) G_{1,n} &= f_1(y_1, y_2) - F_{1,1}(y_1, y_2) , \\ \ddot{G}_{2,1} + \left(1 + \frac{3B^2}{4} + \frac{1,5A^2}{2} \right) G_{2,n} &= f_2(y_1, y_2) - F_2(y_1, y_2) . \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

avec :

$$\begin{aligned} f_1(y_1, y_2) &= 2 \left(\frac{3A^2}{y_1} - y_1^3 \right) + 0,8 y_1 \left(\frac{B^2}{2} - y_2^2 \right) , \\ f_2(y_1, y_2) &= (1,05)^2 \left[\frac{3B^2}{4} y_2 - y_2^3 + 1,5 y_2 \left(\frac{A^2}{2} - y_1^2 \right) \right] . \end{aligned}$$

On remplace y_1, y_2 par les valeurs trouvées précédemment du système (7) soit $y_1 = a_1 \cos \omega t$ et $y_2 = a_2 \cos \omega t$.

Les calculs ne seront pas mentionnés, nous n'indiquerons que les résultats terminaux.

Soit :

$$\left. \begin{aligned} F_{1,1} &= \frac{1}{4} (6 A^2 - 6 a_1^2 + 1,6 B^2 - 2,4 a_2^2) y_1 , \\ G_{1,1} &= - \frac{(a_1^3 + 0,4 a_1 a_2^2) \cos 3 \omega t}{2 \left[\left(1 + \frac{3A^2}{2} + 0,4 B^2 \right) - 9 \omega^2 \right]} . \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} F_{2,1} &= \frac{(1,05)^2}{4} (3B^2 - 3a_2^2 + 3A^2 - 4,5 a_1^2) y_2 , \\ G_{2,1} &= - \frac{(1,05)^2 a_2^3 + 1,5 a_2 a_1^2 \cos \omega t}{4 \left[(1,05)^2 \left\{ 1 + \left(\frac{3}{4} B^2 + \frac{1,5 A^2}{2} \right) \right\} - 9 \omega^2 \right]} . \end{aligned} \right\} (10)$$

On posera :

$$H_1 = - \frac{(a_1^3 + 0,4 a_1 a_2^2)}{2 \left[\left(1 + \frac{3A^2}{2} + 0,4 B^2 \right) - 9 \omega_2^2 \right]}$$

$$H_2 = - \frac{(1,05)^2 a_2^3 + 1,5 a_2 a_1^2}{4 \left[(1,05)^2 \left\{ 1 + \left(\frac{3B^2}{4} + \frac{1,5A^2}{2} \right) \right\} - 9 \omega^2 \right]} .$$

de même, plus loin nous poserons :

B_1 = dénominateur de H_1 ,

B_2 = dénominateur de H_2 .

En deuxième approximation nous avons :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{G}_{1,2} + \left(1 + \frac{3A^2}{2} + 0,4 B^2 \right) G_{1,2} &= \frac{\partial f_1}{\partial y_1} G_{1,1} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} G_{2,1} - F_{1,2}(y_1, y_2) , \\ \ddot{G}_{2,2} + (1,05)^2 \left(1 + \frac{3B^2}{4} + \frac{1,5A^2}{2} \right) G_{2,2} &= \frac{\partial f_2}{\partial y_2} G_{2,1} + \frac{\partial f_2}{\partial y_1} G_{1,1} - F_{2,2}(y_1, y_2) . \end{aligned} \right\} (11)$$

avec :

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = \frac{3A^2}{2} - 6 Q_1^2 + 0,8 \left(\frac{B^2}{2} - y_2^2 \right) ,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_2} = - 1,6 y_1 y_2 ,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y_1} = - (1,05)^2 \cdot 3 y_1 y_2 ,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y_2} = (1,05)^2 \left[\frac{3B^2}{4} - 3 y_2^2 + 1,5 \left(\frac{A^2}{2} - y_1^2 \right) \right] .$$

Tous calculs faits on trouve :

$$\left. \begin{aligned} F_{1,2} &= - \left[\frac{3 a_1 H_1}{2} + 0,2 \frac{a_2^2}{a_1} H_1 + 0,4 a_2 H_2 \right] y_1 , \\ F_{2,2} &= - \frac{(1,05)^2}{4} \left[3 H_2 a_2 + \frac{1,5 a_1^2}{a_2} H_2 + 3 a_1 H_2 \right] y_2 . \end{aligned} \right\} (12)$$

d'où :

$$\left. \begin{aligned} \omega_{1,2}^2 &= \beta_1 - \frac{F_{1,1}}{y_1} - \frac{F_{1,2}}{y_1} = 1 + \frac{3 a_1}{2} (a_1 + H_1) + 0,2 a^2 (3 a_2 + 2 H_2 + \frac{a_2}{a_1} H_1) , \\ \omega_{2,2}^2 &= \beta_2 - \frac{F_{2,1}}{y_2} - \frac{F_{2,2}}{y_2} = (1,05)^2 + \frac{(1,05)^2}{4} \left[3 a_2 (a_2 + H_2) + 1,5 a_1 (3 a_1 + 2 H_1 + \frac{a_1}{a_2} H_2) \right] . \end{aligned} \right\} (13)$$

Dans le programme A et B sont déterminés comme dans tous les autres exemples traités, c'est-à-dire par la recherche des extremums des solutions Q_1 et Q_2 ;

avec $Q_1 = y_1 + G_{1,1}$, (première approximation)

$$Q_1 = a_1 \cos \omega t + H_1 \cos 3 \omega t . \quad (14)$$

de même $Q_2 = y_2 + G_{2,1}$, (première approximation)

$$Q_2 = a_2 \cos \omega t + H_2 \cos 3 \omega t . \quad (15)$$

Dans le programme nous avons $A_1 = B_3$,

$$H_2 = B_4 .$$

a_1 et a_2 sont déterminés par la méthode de Newton, à partir des deux équations :

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{h_1}{\omega_{1,2}^2 - \omega_2^2} , \\ a_2 &= \frac{h_2}{\omega_{2,2}^2 - \omega_1^2} . \end{aligned} \right\}$$

D'où le système de deux équations en remplaçant $\omega_{1,2}^2$, et $\omega_{2,2}^2$ par les valeurs (13) :

$$\left. \begin{aligned} & - \frac{3 a_1^5}{B_1} + a_1^3 \left[3 - \frac{1,6 a_2^2}{B_1} - 1,323 \frac{a_2^2}{B_2} \right] \\ & + a_1 \left[0,195 + 1,2 a_2^2 - 0,882 \frac{a_2^4}{B_2} - 1,6 \frac{a_2^4}{B_1} \right] - 0,6 = 0 . \\ \text{et :} \\ & - \frac{a_2^5 \cdot 3(1,05)^3}{B_2} + a_2^3 (1,05)^2 \left[3 - \frac{6 a_1^2 (1,05)^2}{B_2} - \frac{1,2 a_1^2}{B_1} \right] \\ & + a_2 \left[0,8 + 4,96125 a_1^2 - \frac{1,65375 a_1^4}{B_1} - \frac{(1,05)^4 (1,5)^2 a_1^4}{B_2} \right] - 0,4 = 0 \end{aligned} \right\} (16)$$

Dans le programme $a_1 = F_1$, $a_2 = F_2$,

$$A = E_1 , \quad B = E_2 .$$

Tous calculs faits nous avons trouvé au temps $t = 0$, (en deuxième approximation) :

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= a_1 + H_1 = 0,549523915 , \\ Q_2 &= a_2 + H_2 = 0,173096782 . \end{aligned} \right\} (17)$$

Les résultats sont comparés aux travaux numériques de M. D'HONDT [13] .

Celui-ci donne pour $\lambda = 0$, les résultats suivants, traités numériquement par la méthode de Newton.

$$\left. \begin{array}{l} Q_1 = 0,550270351 \quad , \\ Q_2 = 0,172910432 \quad . \end{array} \right\} \quad (18)$$

Soit une erreur de 0,13 %, de la part de notre méthode par rapport à la méthode numérique pour Q_1 et de 0,1 % pour Q_2 .

II - 8 - SOIT L'EQUATION A RETARD :

$$\ddot{x}(t) - 0,1 \ddot{x}(t-1) + 0,1 \dot{x}(t) + x^3(t-1) = \sin t. \quad (1)$$

R. BOUC [4] a prouvé l'existence d'une solution périodique et en a donné une expression sous forme d'un développement en série de Fourier.

Nous allons comparer ses résultats avec ceux de la méthode proposée.

On pose $x = A x^*$ A amplitude de la solution finale x.

Le développement du terme non linéaire x^3 en polynômes orthogonaux donne :

$$x^3 = \frac{3 A^2}{4} x + (x^3 - \frac{3 A^2}{4} x) .$$

(1) devient :

$$\ddot{x}(t) - 0,1 \ddot{x}(t-1) + 0,1 \dot{x}(t) + \frac{3A^2}{4} x(t-1) = \sin(t) + \frac{3A^2}{4} x(t-1) - x^3(t-1). \quad (2)$$

A cette équation on applique la méthode de "Linéarisation équivalente".

Le système linéaire équivalent s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y}(t) - 0,1 \ddot{y}(t-1) + 0,1 \dot{y}(t) + \frac{3A^2}{4} y(t-1) &= \sin t + F_n(y, \dot{y}, \ddot{y}) , & (3,1) \\ \ddot{G}_n(t) - 0,1 \ddot{G}_n(t-1) + 0,1 \dot{G}_n(t) + \frac{3A^2}{4} G_n(t-1) &= f(y, \dot{y}) - F_n(y, \dot{y}) . & (3,2) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

On posera :

$$\left. \begin{aligned} u_n &= 1 - \frac{F_n(\ddot{y})}{\ddot{y}} \\ b_n &= 0,1 - \frac{F_n(\dot{y})}{\dot{y}} \\ d_n &= \frac{3A^2}{4} - \frac{F_n(y(t-1))}{y(t-1)} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

d'où (3,1) s'écrit :

$$u \ddot{y}(t) - 0,1 \ddot{y}(t-1) + b \dot{y}(t) + dy(t-1) = \sin t \quad (5)$$

On prend la solution de (5) sous la forme : $y = a \sin(t - \alpha)$

$$\text{ou } y = a e^{j(t - \alpha)}.$$

d'où (5) devient :

$$- a u e^{j(t - \alpha)} + 0,1 a e^{j(t - \alpha - 1)} + j b a e^{j(t - \alpha)} + d a e^{j(t - \alpha - 1)} = e^{j t}$$

$$\Rightarrow a e^{-j\alpha} \cdot \left[-u + 0,1 e^{-j} + j b + d e^{-j} \right] = 1.$$

$$a = \frac{1}{\left[\left\{ -u + (d + 0,1) \cos 1 \right\}^2 + \left\{ b - (d + 0,1) \sin 1 \right\}^2 \right]^{1/2}} \quad (6)$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha &= a \left\{ -u + (d + 0,1) \cos 1 \right\} \\ \sin \alpha &= a \left\{ b - (d + 0,1) \sin 1 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Première approximation :

$$\ddot{G}_1(t) - 0,1 \ddot{G}_1(t-1) + 0,1 \dot{G}_1(t) + \frac{3A^2}{4} G_1(t-1) = f(y) - F_1(y, \dot{y}, \ddot{y}) \quad (8)$$

avec :

$$f(y) = \frac{3A^2}{4} y(t-1) - y^3(t-1).$$

$$\left. \begin{aligned} y &= a \sin(t - \alpha) \\ y &= a \cos(t - \alpha) \end{aligned} \right\}$$

$$f(y) = \frac{3A^2}{4} a \sin(t - \alpha - 1) - a^3 \sin^3(t - \alpha - 1)$$

On pose $\psi = t - \alpha$

$$\Rightarrow f(y) = \frac{3A^2}{4} y(t-1) - \frac{3a^3}{4} y(t-1) + \frac{a^3}{4} \sin 3 [\psi - 1] .$$

$$\text{d'où : (9) } F_1(y, y) = \left[\frac{3A^2}{4} - \frac{3a^2}{4} \right] y(t-1) .$$

$$\text{de (4) on déduit : } \underline{d_1 = \frac{3a^2}{4}}$$

On pose $(\psi - 1) = \phi$, (8) devient :

$$\ddot{G}_1(t) - 0,1 \ddot{G}_1(t-1) + 0,1 \dot{G}_2(t) + \frac{3A^2}{4} G_1(t-1) = \frac{a^3}{4} \sin 3 \phi \quad (10)$$

On cherche la solution en G_1 sous la forme :

$$G_1 = h e^{3j(\phi - \delta)} = h \sin 3(\phi - \delta)$$

On trouve :

$$\left. \begin{aligned} h &= \frac{a^3}{4 D_1} , \cos 3 \delta = - \frac{9 + (0,9 + \frac{3A^2}{2}) \cos 3}{D_1} , \\ \sin 3 \delta &= \frac{0,3 - (0,9 + \frac{3A^2}{4}) \sin 3}{D_1} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\text{avec } D_1 = \left[\left\{ -9 + (0,9 + \frac{3A^2}{4}) \cos 3 \right\}^2 + \left\{ 0,3 - (0,9 + \frac{3A^2}{4}) \sin 3 \right\}^2 \right]^{1/2}$$

La deuxième approximation nous donne :

$$\ddot{G}_2(t) - 0,1 \ddot{G}_2(t-1) + 0,1 \dot{G}_2(t) + \frac{3A^2}{4} G_2(t-1) = \left[\frac{\partial f}{\partial y} G_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{G}_1 \right] - F_2(y, \dot{y}, \ddot{y}) . \quad (12)$$

$$\text{avec } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3A^2}{4} - 3y^2(t-1) , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 .$$

Tous calculs faits on trouve :

$$\frac{\partial f}{\partial y} G_1 = \frac{3hA^2}{4} \sin 3(\phi - \delta) - \frac{3ha^2}{2} \sin 3(\phi - \delta) + \frac{3ha^2}{4} \left[\sin(5\phi - 3\delta) + \sin(\phi - 3\delta) \right]$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } F_2(y, \dot{y}, \ddot{y}) &= \frac{3ha}{4} \cos 3\delta \, y(t-1) - \frac{3ha \sin 3\delta}{4} \cos 1 \, \dot{y}(t) \\ &+ \frac{3ha}{4} \sin 3\delta \sin 1 \, \ddot{y}(t). \end{aligned}$$

de (4) il vient :

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= 1 - \frac{3ah}{4} \sin 1 \sin 3\delta, \\ b_2 &= 0,1 + \frac{3ha}{4} \sin 3\delta \cos 1, \\ d_2 &= \frac{3a^2}{4} - \frac{3ha}{4} \cos 3\delta. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

(12) devient :

$$\begin{aligned} \ddot{G}_2(t) - 0,1 \ddot{G}_2(t-1) + 0,1 \dot{G}_2(t) + \frac{3A^2}{4} G_2(t-1) &= \left[\frac{3A^2h}{4} \sin 3(\phi-\delta) - \frac{3a^2h}{4} \sin 3(\phi-\delta) \right. \\ &\left. + \frac{3a^2h}{4} \sin(5\phi - 3\delta) \right] \end{aligned}$$

On cherche G_2 sous la forme :

$$G_2 = V_1 e^{3j(\phi - \delta - \xi)} + V_2 e^{5j(\phi - \frac{3}{5}\delta - \eta)}$$

$$\text{On trouve : (14) } V_1 = \frac{3h(\frac{A^2}{2} - a^2)}{2 D_1},$$

$$(15) \quad V_2 = \frac{3a^2h}{4 D_2}.$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} \cos 3\xi &= \cos 3\delta \\ \sin 3\xi &= \sin 3\delta \end{aligned} \right\} \Rightarrow G_2 = V_1 \sin 3(\phi - 2\delta) + V_2 \sin 5(\phi - \frac{3\delta}{5} - \eta). \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin 5 \eta &= \frac{0,5 - (2,5 + \frac{3A^2}{4}) \sin 5}{D_2}, \quad \cos 5 \eta = - \frac{2,5 + (2,5 + \frac{3A^2}{4}) \cos 5}{D_2} \end{aligned} \right\} (17)$$

$$D_2 = \left[\left\{ -25 + (2,5 + \frac{3A^2}{4}) \cos 5 \right\}^2 + \left\{ 0,5 - (2,5 + \frac{3A^2}{4}) \sin 5 \right\}^2 \right]^{1/2}$$

Troisième approximation

$$\ddot{G}_3(t) = 0,1 \ddot{G}_3(t-1) + 0,1 \dot{G}_3(t) + \frac{3A^2}{4} G_3(t-1) = \frac{\partial f}{\partial y} G_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} G_1^2 - F_3(y, \dot{y}, \ddot{y}) \quad (18)$$

$$\text{avec } \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -3 y(t-1) = -3 a \sin(\psi - 1)$$

Tous calculs faits on obtient :

$$\begin{aligned} F_3(y, \dot{y}, \ddot{y}) &= \frac{3 a V_1}{4} \sin 6 \delta y(t-1) - \frac{3 h^2}{2} y(t-1) \\ &+ \frac{3 a V_1 \cos 1 \cos 6 \delta}{4} \dot{y}(t) - \frac{3 a V_1}{4} \cos 6 \delta \sin 1 \ddot{y}(t). \end{aligned}$$

En troisième approximation de (4) nous tirons :

$$\left. \begin{aligned} u_3 &= 1 - \frac{3 a h}{4} \sin 3 \delta \sin 1 + \frac{3 a u_5}{4} \cos 6 \delta \sin 1 \\ b_3 &= 0,1 + \frac{3 a h}{4} \sin 3 \delta \cos 1 - \frac{3 a u_5}{4} \cos 6 \delta \cos 1 \\ d_3 &= \frac{3 a^2}{4} - \frac{3 h a}{4} \cos 3 \delta - \frac{3 a u_5}{4} \sin 6 \delta + \frac{3 h^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

A ce stade d'approximation, explicitons les calculs des différents paramètres, a , A , ω_1^2 .

- A étant l'amplitude de la solution x , est calculée en recherchant les maximums et minimums de cette solution :

donc à partir de l'annulation de la dérivée $\dot{x}$.

La fonction $f(x)$ en troisième approximation étant généralement compliquée, cette recherche des extremums, se fait à l'aide d'un programme permettant de ne conserver que les deux plus grands.

$x = y + G_1 + G_2$ (on s'arrête pour la forme de la solution en deuxième approximation).

- a est calculé à partir de l'équation (6), en remplaçant u_n, b_n, d_n par les valeurs u_3, b_3, d_3 (19), nous obtenons ainsi une équation du 14^{ème} degré en a , résolue dans le programme par la méthode de Newton.

- La nouvelle pulsation ω_1^2 est déterminée à partir de l'équation en d_3 de (19).

Dans le programme (Pages 96 bis et 96 ter)

Ligne 50 à 350	→ Recherche des racines (pour calcul de A)
Ligne 550 à 680	→ Classement des racines (pour calcul de A)
Ligne 360 à 385	→ Valeurs initiales (pour le calcul de a)
Ligne 390 à 500	→ Calcul de a
Ligne 510 à 530	→ Calcul des autres coefficients. en particulier d_3 donnant

d'autre part : $E = A$, $F = a$, $B_3 = \sin 3 \delta$, $B_4 = \cos 3 \delta$

$$G_6 = u_3 \quad , \quad G_7 = d_3 \quad , \quad G_8 = b_3$$

u_1 dérivée de G_6

u_2 dérivée de G_7

u_3 dérivée de G_8

$G_2 =$ équation (6)

$G_3 =$ dérivée de G_2 .

$$B_1 = h \quad , \quad u_5 = V_1 \quad , \quad B_6 = \sin \alpha \quad , \quad B_7 = \cos \alpha \quad , \quad B_2 = D_1$$

Résultats numériques

Soit en deuxième approximation, la solution x donnée par $x = y + G_1$.

$$\begin{aligned}
 x = & a \cos \alpha \sin t - a \sin \alpha \cos t \\
 & + B_1 \cos 3 \delta \left[\cos 3(\alpha + 1) \sin 3 t - \sin 3(\alpha + 1) \cos 3 t \right] \\
 & - B_1 \sin 3 \delta \left[\cos 3(\alpha + 1) \cos 3 t + \sin 3(\alpha + 1) \sin 3 t \right] .
 \end{aligned}$$

$$\text{avec } B_1 = h = \frac{a^3}{4 \left[\left\{ -9 + (0,9 + \frac{3A^2}{4}) \cos 3 \right\}^2 + \left\{ 0,3 - (0,9 + \frac{3A^2}{4}) \sin 3 \right\}^2 \right]^{1/2}}$$

Les résultats numériques sont les suivants :

$$\begin{aligned}
 A &= 1,080921307 , & \cos 3 \delta &= -0,999989488 , \\
 a &= 1,113437925 , & \sin 3 \delta &= 4,58511 \cdot 10^{-3} , \\
 \sin \alpha &= -0,878532176 , & \cos \alpha &= -0,477683364 , \\
 h &= 0,032076064 .
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Soit : } & \boxed{ \begin{aligned} x = & 0,9781910431 \cos t - 0,5318707736 \sin t \\ & + 0,0319987875 \sin 3 t + 0,0022252025 \cos 3 t \end{aligned} } \quad (20)
 \end{aligned}$$

Le résultat est comparé, aux travaux de M. BOUC, donnant par une méthode numérique :

$$\begin{aligned}
 x = & 0,972967328 \cos t - 0,567856957 \sin t \\
 & + 0,030038127 \cos 3 t + 0,004375301 \sin 3 t .
 \end{aligned}$$

Un moyen simple pour connaître la validité de notre méthode, par rapport aux calculs numériques, ainsi qu'à certaines méthodes de perturbation, est de calculer une erreur moyenne pour plusieurs valeurs de t dans l'équation (1), en remplaçant $x(t)$, $x(t-1)$, $x(t)$, $x(t-1)$, par les valeurs calculées (20) à partir de notre deuxième approximation.

M. BOUC, par sa méthode numérique trouve une erreur de l'ordre de $6 \cdot 10^{-6}$.

Il indique aussi, que par une méthode de perturbation classique, l'erreur est de l'ordre de $3 \cdot 10^{-1}$.

Nous avons trouvé pour notre méthode, en deuxième approximation une erreur de l'ordre de 9.10^{-3} .

C'est-à-dire que notre méthode donne une erreur, 30 fois moins importante, que celle des méthodes classiques. (Cette amélioration est sensiblement la même dans tous les exemples étudiés). Elle est loin néanmoins d'atteindre la précision des méthodes numériques.

Programme pour l'équation :

$$\ddot{x}(t) - 0,1\ddot{x}(t - 1) + 0,1x(t) + x^3(t - 1) = \sin t.$$

```

10 DIM A [10]
20 DISP 'MU' ;
30 INPUT M
40 GOTO 360
50 I = XO = 0
60 X2 = 2 * PI
70 X1 = PI/10
80 X = XO
90 GOSUB 330
100 YO = Y
110 XO = X
120 IF YO = 0 THEN 250
130 X = X + X1
140 IF X X2 THEN 320
150 GOSUB 330
160 IF Y*YO = 0 THEN 100
170 XO = X
180 X3 = X1
190 X3 = X3 Y/(YO -Y)
200 X = X + X3
210 IF ABS(X3/X) >= 1E - 06 THEN 250
220 YO = Y
230 GOSUB 330
240 GOTO 190
250 GOTO 260
260 I = I + 1
270 GOTO 280
280 A [I] = F * SINX + B1 * SIN(3 * X) * (COS3 * B4 - SIN3 * B3) - B1 * COS(3 * X) (SIN3 * B4 + COS3 * B3)
290 A [I] = A' [I] + U5 * SIN(3 * X) * (COS3 * (B4 + 2 - B3 + 2) - SIN3 * (2 * B3 * B4))
292 A [I] = A [I] - U5 * COS(3 * X) * (SIN3 * (B4 + 2 - B3 + 2) + 2 * B3 * B4 * COS3)
300 XO = XO + X1
310 GOTO 80
320 RETURN
330 Y=F COSX+3*B1*(COS3*B4-SIN3*B3) COS(3*X)+3*B1*(SIN3*B4+COS3*B3) SIN(3*X)
340 Y=Y+3*U5*COS(3*X)*(COS3*(B4+2-B3+2)-SIN3*(2*B3*B4))
342 Y=Y+3*U5*SIN(3*X)*(SIN3*(B4+2-B3+2)+2*COS3*B3*B4)
350 RETURN
360 D=0
380 E=0.8
385 F=0.8
390 B2=SQR((-9+(0.9+3 E^2/4)*COS3)+2+(0.3-50.9+3 E^2/4)*SIN3)+2)
392 B3=(-9+(0.9+3 E^2/4)*COS3)/B2
394 B4=(0.3-(0.9+3 E^2/4)*SIN3)/B2
400 G6=1-3*B3*SIN1*F+4/(16*B2)+9 (B4+2-B3+2)*SIN1*(E^2*F+4/2-F+6)/(32*B2+2)
402 G7=3*F+2/4-3*B4*F+4/(16*B2)+3*F+6/(32*B2+2)-9*F+4*B4*B3*(E^2/2-F+2)/(16*B2+2)
404 G8=0.1+3*B3*COS1*F+4/(16*B2)-9*(B4+2-B3+2)*COS1*F+4*(E^2/2-F+2)/(32*B2+2)
406 U1=-3*B3*SIN1*F+3/(4*B2)+9 E^2*(B4+2-B3+2)*SIN1*F+3/(16*B2+2)
407 U1=U1-54*(B4+2-B3+2)*SIN1*F+5/(32*B2+2)
408 U2=3*F/2-3*B4*F+3/(4 B2)-9 E^2*B4*B3*F+3/(2*B2+2)
409 U2=U2+(54*B4*B3/(4*B2+2)+9/B2+2)*F+5
410 U3=3*B3*COS1*F+3/B2-9*E^2*COS1*(B4+2-B3+2)*F+3/(4*B2+2)
411 U3=U3+54*(B4+2-B3+2)*COS1*F+5/(8 B2+2)
412 G1=G6+2+G7+2+G8+2+0.1+2+0.2*G7-2*G6*(G7+0.1)*COS1
414 G1=G1-2*G8*(G7+0.1)*SIN1
416 G2=G1*F+2-1
418 G3=2*G1*F+2*(2*G6*U1+2*G7*U2+2*G8*U3+0.2*U2-2*COS1*U1*(G7+0.1))
420 G3=G3-F+2*(2*COS1*G6*U2+2*SIN1*(G7+0.1)*U3+2*G8*U2*SIN1)

```


Suite du programme de l'équation à retard

```
470 H=-G2/G3
480 IF ABS(H/F) <= 1E-06 THEN 510
490 F=F+H
500 GOTO 390
510 B1=F+3/(4*B2)
512 U5=3*B1*(E+2/2-F 2)/(2*B2)
520 B6=F*(G8-(G7+0.1)*SIN1)
530 B7=F*(-G6+(G7+0.1)*(COS1)
550 GOSUB 50
560 A1=AO=A 1
570 FOR J=2 TO I
580 IF A [J] > AO THEN 610
590 IF A [J] < A1 THEN 630
600 GOTO 640
610 AO=A [J]
620 GOTO 640
630 A1=A J
640 NEXT J
650 E3=(AO-A1)/2
660 D3=(AO+A1)/2
670 IF ABS(E3-E)+ABS(D3-D)>1E-03 THEN 690
680 STOP
690 E=E3
700 D=D3
710 PRINT "E="E;"D ="D;"B1="B1;"B2="B2;"F="F;"B3="B3
715 PRINT "B4="B4; "B6="B6;"B7="B7;"M="M
720 GOTO 390
730 END
```


II - 9 - ETUDE DE L'EQUATION DE VAN DER POL :

$$\underline{\ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu \omega_0 (1 - x^2) \dot{x}} \quad (1)$$

A) Cette équation a été étudiée par de nombreux auteurs : M. URABE, CLENSHAW, etc ...

Nous étudierons encore ici la solution périodique, et nous nous intéresserons plus particulièrement au calcul de la période et de l'amplitude pour des $\mu > 1$.

Le développement du terme non linéaire de l'équation (1) en polynômes orthogonaux donne :

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= a_0 P_0(x/A) + a_2 P_2(x/A) \\ x^2 &= \frac{A^2}{2} + x^2 - \frac{A^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

En ne considérant que la solution obtenue à partir du premier terme du développement en polynômes orthogonaux on obtient :

$$\ddot{x} + \mu \left(\frac{A^2}{2} - 1 \right) \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3)$$

La solution de la forme : $x = A \cos \omega_1 t = \dot{A} x^*$

D'autre part, la recherche de la solution périodique nous impose :

$$\mu \left(\frac{A^2}{2} - 1 \right) \dot{x} = 0 \implies A^2 = 2 \quad \text{d'où} \quad A = \sqrt{2} \quad (4)$$

et la période restant égale à $2 \pi \sqrt{\mu}$.

B) Application de notre méthode

$$\ddot{x} + \mu \omega_0 \left(\frac{A^2}{2} - 1 \right) \dot{x} + \omega_0^2 x = \mu \omega_0 \left(\frac{A^2}{2} - x^2 \right) \dot{x} \quad (5)$$

Le système linéaire équivalent s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y} + \mu \omega_0 \left(\frac{A^2}{2} - 1 \right) \dot{y} + \omega_0^2 y &= \mu F_n(y, \dot{y}) \\ \ddot{y} + B_n \dot{y} + \omega_1^2 y &= 0 \\ \text{avec : } B_n &= \mu \omega_0 \left(\frac{A^2}{2} - 1 \right) - \mu \frac{F_n(\dot{y})}{\dot{y}} \\ \text{et } \omega_1^2 &= \omega_0^2 - \mu \frac{F_n(y)}{y} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

La solution y s'écrit : $y = a \cos \omega_1 t$ (7)

Première approximation :

$$\ddot{G}_1 + \mu \left(\frac{A^2}{2} - 1 \right) \dot{G}_1 + G_1 = \mu f(y, \dot{y}) - \mu F_1(y, \dot{y}) \quad (8)$$

ω_0 n'est plus introduit car dans toutes les applications numériques nous ferons $\omega_0^2 = 1$, d'où : $\omega_1^2 = 1 - \mu \frac{F(y)}{y}$

$$f(y, \dot{y}) = \left(\frac{A^2}{2} - y^2 \right) \dot{y}$$

avec $y = a \cos \omega_1 t$

$$\dot{y} = -a \omega_1 \sin \omega_1 t.$$

L'on obtient :

$$\left. \begin{aligned} F_1(y, \dot{y}) &= \mu \left[\frac{A^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right] \dot{y} \Rightarrow B_1 = \mu \left(-1 + \frac{a^2}{4} \right) \\ G_1 &= \frac{\mu a^3 \omega_1 \sin 3(\omega_1 t - \alpha)}{4 D_2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\text{avec } D_2 = \left[(1 - 9 \omega_1^2)^2 + 9 \mu^2 \left(\frac{A^2}{2} - 1 \right)^2 \omega_1^2 \right]^{1/2}$$

d'où :

$$\left. \begin{aligned} \sin 3 \alpha &= \frac{3 \mu \left(\frac{A^2}{2} - 1 \right) \omega_1}{D_2} \\ \cos 3 \alpha &= \frac{1 - 9 \omega_1^2}{D_2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

On posera de plus : $G_1 = D_1 \sin 3 (\omega_1 t - \alpha)$

$$\text{avec } D_1 = \frac{\mu a^3 \omega_1}{4 D_2}$$

Deuxième approximation :

$$\ddot{G}_2 + \mu \left(\frac{A^2}{2} - 1 \right) \dot{G}_2 + G_2 = \mu \left[\frac{\partial f}{\partial y} G_1 + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \dot{G}_1 \right] - \mu F_2(y, \dot{y}) \quad (11)$$

$$\text{avec } \frac{\partial f}{\partial y} = -2 y \dot{y}, \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{A^2}{2} - y^2.$$

Tous calculs faits on obtient :

$$F_2(y, \dot{y}) = - \frac{\mu a \omega_1 D_1 \cos 3 \alpha}{4} y + \frac{\mu a D_1 \sin 3 \alpha}{4} \dot{y}. \quad (12)$$

d'où :

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= \mu \left[-1 + \frac{a^2}{4} - \frac{a D_1}{4} \sin 3 \alpha \right] \\ \omega_1^2 &= 1 + \frac{\mu a \omega_1 D_1 \cos 3 \alpha}{4} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

et :

$$G_2 = \frac{3 \mu \omega_1 D_1 (A^2 - a^2) \cos 3(\omega_1 t - \alpha - \delta_1)}{2 D_2} - \frac{5 \mu \omega_1 D_1 a^2 \cos 5(\omega_1 t - \frac{3\alpha}{5} - \delta_2)}{4 D_3} \quad (14)$$

$$\text{avec } D_3 = \left[(1 - 25 \omega_1^2)^2 + 25 \omega_1^2 \mu^2 \left(\frac{A^2}{2} - 1 \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Nous avons de plus :

$$\left. \begin{aligned} \cos \delta_1 &= \cos \alpha \\ \sin \delta_1 &= \sin \alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cos 3(\omega_1 t - \alpha - \delta_1) = \cos 3(\omega_1 t - 2\alpha).$$

$$\left. \begin{aligned} \cos 5 \delta_2 &= \frac{1 - 25 \omega_1^2}{D_3} , \\ \sin 5 \delta_2 &= \frac{5 \mu \omega_1 \left(\frac{A^2}{2} - 1 \right)}{D_3} . \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

La troisième approximation nous donne :

$$\ddot{G}_3 + \mu \left(\frac{A^2}{2} - 1 \right) \dot{G}_3 + G_3 = \mu \left[\frac{\partial f}{\partial y} G_2 + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \dot{G}_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} G_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{y}^2} \dot{G}_1^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \dot{y}} G_1 \dot{G}_1 \right] - \mu F_3(y, \dot{y}). \quad (16)$$

$$\text{avec : } \frac{\partial f}{\partial y} = -2 y \dot{y} , \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{A^2}{2} - y^2 , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 \dot{y} ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{y}^2} = 0 , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \dot{y}} = -2 y .$$

$$\left. \begin{aligned} \text{On posera : } B_6 &= \frac{3 \mu \omega_1 D_1 (A^2 - a^2)}{2 D_2} , \\ B_7 &= \frac{5 \mu \omega_1 D_1 a^2}{4 D_3} , \\ B_8 &= \sin 5 \delta_2 , \quad B_9 = \cos 5 \delta_2 . \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Tous calculs faits on obtient :

$$\mu F_3(y, \dot{y}) = \left[\frac{\mu B_6 a}{2} \cos 6 \alpha - \frac{3 \mu a B_6}{4} \cos 6 \alpha - \frac{\mu D_1^2}{2} \right] \dot{y} + \left[\frac{\mu B_6 \omega_1 a}{2} \sin 6 \alpha - \frac{3 \mu a \omega_1 B_6}{4} \sin 6 \alpha \right] y .$$

$$\text{d'où } \mu F_3(y, \dot{y}) = \left[-\frac{\mu B_6 a \cos 6 \alpha}{4} - \frac{\mu D_1^2}{2} \right] \dot{y} - \frac{\mu \omega_1 a B_6 \sin 6 \alpha y}{4} .$$

d'où :

$$\left. \begin{aligned} B_3 &= \mu \left[-1 + \frac{a^2}{4} - \frac{a D_1}{4} \sin 3\alpha + \frac{a B_6}{4} \cos 6\alpha + \frac{B_1^2}{2} \right], \\ \omega_1^2 &= 1 + \frac{\mu a \omega_1 D_1}{4} \cos 3\alpha + \frac{\mu \omega_1 B_6 a}{4} \sin 6\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

La recherche de la solution périodique nous impose de faire $B_n = 0$, de l'équation (18) avec $B_3 = 0$, on obtient une équation du 6^{ème} degré en a résolue dans le programme par la méthode de Newton.

A est déterminé par la recherche de l'amplitude de la solution x en deuxième approximation :

$$x = y + G_1 + G_2$$

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \omega_1 t + D_1 \sin 3(\omega_1 t - \alpha) + B_6 \cos 3(\omega_1 t - 2\alpha) \\ &\quad + B_7 \cos 5(\omega_1 t - \frac{3}{5} - \delta_2). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

C) Etude numérique de l'équation de Van der Pol.

Il est utile, tout d'abord de préciser, que tous les calculs faits, lors des applications numériques, ont été effectués en prenant la forme de la solution $x = A x^* + D$ et non $x = A x^*$, comme nous l'avons pris lors de l'application à la linéarisation équivalente [§ B].

Car cela revenait à admettre que la solution finale en x était impaire, donc l'existence d'une symétrie entre les maximums et minimums $\beta = \alpha$ (ou inversement), ce qui à première vue n'était pas évident.

Or tous les calculs ont montré, par la suite, que D n'intervenait pas dans la recherche de cette solution (D étant généralement $< 10^{-12}$).

Les développements donnés précédemment dans la linéarisation équivalente, sans le D restent donc valables.

Toutefois, il est quand même utile de préciser la forme de ces équations en tenant compte du D.

$$(1) \quad \ddot{x} - \mu (1 - x^2) \dot{x} + x = 0 .$$

$$x = A x^* + D \implies x^* = \frac{x - D}{A} \quad (20)$$

$$(1 - x^2) \dot{x} = \left[1 - A^2 x^{*2} - 2 A D x^* - D^2 \right] \dot{x}^* . \quad (21)$$

$$x^{*2} = \frac{1}{2} + x^{*2} - \frac{1}{2} = a_0 P_0(x/A) + a_1 P_1(x/A) .$$

d'où (1) devient :

$$\ddot{x} - \mu \left[1 - D^2 - \frac{A^2}{2} \right] \dot{x} + x = - \mu \left[\left\{ (x-D)^2 - \frac{A^2}{2} \right\} \dot{x} + 2D(x-D) \dot{x} \right] . \quad (22)$$

Linéarisation équivalente

$$\left. \begin{aligned} \ddot{y} + \beta \dot{y} + \omega_1^2 y &= \mu F_n(y, \dot{y}) \\ y &= a \cos \omega_1 t \\ \ddot{G}_n - \mu \left[1 - D^2 - \frac{A^2}{2} \right] \dot{G}_n + G_n &= \mu f(y, \dot{y}) - \mu F_n(y, \dot{y}) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

d'où en première approximation :

$$\left. \begin{aligned} F_1(y, \dot{y}) &= \left[\frac{A^2}{2} + D^2 - \frac{a^2}{4} \right] \dot{y} \\ G_1 &= \frac{\mu a^3 \omega_1 \sin 3(\omega_1 t - \alpha)}{4 \left[(1 - 9 \omega_1^2)^2 + 9 \mu^2 \omega_1^2 \left(1 - D^2 - \frac{A^2}{2} \right)^2 \right]^{1/2}} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

L'on retrouve bien la forme initiale (§ B) si $D \ll 1$.

A partir de ces résultats, il nous restait à faire la comparaison de la méthode de polynômes orthogonaux, par rapport à d'autres méthodes. Nous avons utilisé pour la comparaison deux méthodes numériques, celle de M. URABE [22] , ainsi que celle de C.W. CIENSCHAW, celle-ci utilisant avant le passage en numérique, un développement du terme de perturbation, en une série de TEHEBYCHEFF [23] .

Ces deux méthodes donnaient, les valeurs de l'amplitude de la solution x , ainsi que celles de la nouvelle période, en fonction du paramètre μ variant de 0 à 30 (ou de 0 à 10 dans la méthode de CLENSHAW).

L'étude de notre partie numérique de l'équation de VAN DER POL pouvait s'effectuer comme dans tous les autres exemples traités.

Nous avons trois inconnues, A , a et ω_1 .

- A étant l'amplitude de la solution $x = y + G_1$ (en première approximation) calculée à partir du programme sur la recherche des maximums et des minimums (β et α).

$$\text{- étant donné par : } \omega_1^2 = 1 + \frac{\mu^2 a^4 \omega_1^2 \cos 3 \alpha}{\left[16 (1-9\omega_1^2)^2 + 9\mu^2 \left(\frac{A^2}{2} - 1 \right)^2 \omega_1^2 \right]^{1/2}}$$

- et a se calculait à partir du B_2 :

$$-\frac{\mu^2 a^4 \omega_1^2 \sin 3 \alpha}{16 \left[(1-9\omega_1^2)^2 + 9\mu^2 \left(\frac{A^2}{2} - 1 \right)^2 \omega_1^2 \right]^{1/2}} + \frac{\mu a^2}{4} - \mu = 0.$$

(pour la deuxième approximation)

Il fallait donc calculer deux inconnues pour déterminer la troisième.

Nous avons envisagé trois possibilités (soit en deuxième, soit en troisième approximation) :

A étant toujours calculé dans les trois cas par la méthode de recherche des racines (cl II-8)

1) a était calculé à partir de la méthode de Newton.

Nous obtenions numériquement :

μ	T_1	T_2	T_3
0,5		6,38067758	6,381229673
1	6,687	6,66328686	6,683170339
1,5		7,09637358	7,069734415
2	7,6310	7,62986	7,397351844
3	8,8613	8,8590955	non convergence du calcul.

T_1 : calcul de M. URABE T représentant la période
 T_2 : calcul de M. CLENSHAW finale du système.
 T_3 : nos résultats

Les valeurs sont données ici en deuxième approximation pour notre calcul (T_3), T_1 , T_2 étant calculés numériquement.

- 2) Nous pensions que la non convergence de la solution pour $\mu > 3$ venait "peut-être" de la méthode de Newton, dans le cas où deux racines de l'équation en $\underline{a}$ seraient voisines l'une de l'autre.

L'équation en $\underline{a}$ étant linéaire, il était donc possible de déterminer directement les racines.

Or, tous calculs faits nous retrouvions les mêmes résultats que précédemment :

$$\mu = 1 \quad T = 6,683314618$$

$$\mu = 2 \quad T = 7,4052100529$$

et pour $\mu \geq 3$ aucune convergence du calcul.

- 3) A partir de l'équation en ω_1^2 , on peut tirer facilement $\underline{a}$ en fonction de A et ω_1 , donc éliminer une inconnue :

$$a^4 = \frac{(\omega_1^2 - 1) 16 B_2}{\mu^2 \omega_1^2 \cos 3\alpha} \quad B_2 = \left[(1 - 9\omega_1^2)^2 + 9\mu^2 \left(\frac{A^2}{2} - 1 \right)^2 \omega_1^2 \right]^{1/2}$$

Le programme devenait sensiblement plus "lourd" et nous n'obtenions aucune convergence des différentes valeurs calculées, quelle que soit la valeur de μ .

Conclusion

Il est difficile de donner les raisons pour lesquelles notre méthode n'est plus applicable pour des paramètres de non linéarité $\mu \geq 3$. D'autant plus qu'un calcul analytique approché montre qu'il existe bien une convergence suivant les différents stades d'approximation.

L'on peut émettre les hypothèses suivantes :

- Soit notre méthode numérique employée pour tous nos exemples précédents, ne convient plus à ce type d'équation,
- Soit que l'équation de V.D.P. présente une difficulté de résolution par les polynômes orthogonaux, vu l'apparition de termes de la forme $x \cdot \dot{x}$, dont on définit difficilement à quel stade d'approximation ils appartiennent, lorsque l'on passe de l'équation (1) à l'équation (5).

D) Cas de VAN DER POL pour $\mu = 0,1$

$$\ddot{x} - 0,1(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$$

La comparaison de cet exemple étant faite avec un exemple traité numériquement par M. STOKES [18]

Nous prendrons $y_0 = a \sin \omega_1 t$ comme solution de l'équation linéaire équivalente (6)

d'où en deuxième approximation, la solution x nous est donnée sous la forme :

$$x = y_0 + G_1$$

$$x = a \sin \omega_1 t + \frac{\mu a^3 \omega_1}{4 (1-9\omega_1^2)^2 + 9\mu^2 \left(\frac{A^2}{2} - 1\right)^2 \omega_1^2} \cos 3(\omega_1 t - \alpha)$$

$$\cos 3(\omega_1 t - \alpha) = \cos 3 \omega_1 t \cos 3 \alpha + \sin 3 \omega_1 t \sin 3 \alpha$$

Pour nous trouver dans les mêmes conditions initiales que [18] nous sommes obligés d'effectuer le changement $\omega_1 t$ en $\omega_1 t + \pi$

$$\text{soit } x = a \sin t - \frac{\mu a^3 \omega_1}{4 (1-9\omega_1^2)^2 + 9\mu^2 \left(\frac{A^2}{2} - 1\right)^2 \omega_1^2} \cos 3\omega_1 t \cos 3\alpha + \sin 3\omega_1 t \sin 3\alpha$$

Les résultats de notre méthode nous donnent :

$$a = 2,00047008 \quad ,$$

$$\sin 3\alpha = 0,037572908 \quad ,$$

$$\cos 3\alpha = 0,999293889 \quad .$$

Soit

$$x = - 2,00047008 \sin \omega_1 t - 9,40056 \cdot 10^{-4} \sin 3 \omega_1 t \\ + 0,025001845 \cos 3 \omega_1 t .$$

Et la méthode numérique de [18] nous donne :

$$x(t) = - 2,0 \sin \tau - 9,3 \cdot 10^{-4} \sin 3 \tau + 2,5 \cdot 10^{-2} \cos 3 \tau \\ + 5,2 \cdot 10^{-4} \sin 5 \tau + 3,6 \cdot 10^{-5} \cos 5 \tau$$

avec $\tau = \omega_1 t$

Nous trouvons pour la pulsation $\omega_1 = 0,999375002$.

En numérique la pulsation était donnée par : $\omega_1 = 0,9993$.

C O N C L U S I O N

La méthode présentée s'apparente aux méthodes classiques de perturbations.

Mais par rapport à celles-ci, elle y ajoute certaines particularités et améliorations notables.

Comme celles-ci, elle convient à différents types d'équations non-linéaires : équations autonomes ou non-autonomes, équation d'ordre quelconque, équations aux dérivées partielles (du type propagation) etc ...

En revanche, la solution peut être déterminée analytiquement à l'ordre d'approximation souhaité pour des valeurs importantes du paramètre de non-linéarité.

Enfin, on doit signaler que cette méthode est d'un emploi relativement simple et ne nécessite que peu d'outils mathématiques (ou numériques).

Il est à noter que nous avons tenté l'application des polynômes orthogonaux en liaison avec la méthode de la moyenne. Cependant nous n'avons pu obtenir de résultats significatifs, tout du moins sur les exemples envisagés (par exemple l'équation de Van DER POL).

Il est bien évident qu'il faudrait pour clore ce sujet, compléter l'étude par l'examen des points suivants :

- 1°) Application des polynômes orthogonaux à la recherche de la solution la plus générale (non périodique). Il faut signaler à cet effet que la méthode de linéarisation équivalente, ne serait probablement pas la plus appropriée en raison de sa lourdeur.

ANNEXE

QUELQUES APPLICATIONS DES POLYNÔMES ORTHOGONAUX

On se propose de donner ici quelques exemples d'utilisation des polynômes orthogonaux, en Physique Mathématique.

L'une des toutes premières applications de ces polynômes est la résolution de l'équation de Laplace.

Nous ne donnerons pas le développement des calculs qui se retrouvent dans de nombreux ouvrages cf [1] .

D'autre part, l'utilisation des polynômes orthogonaux est importante dans les domaines de Physique relatifs à la propagation des ondes, au magnétisme et en électricité.

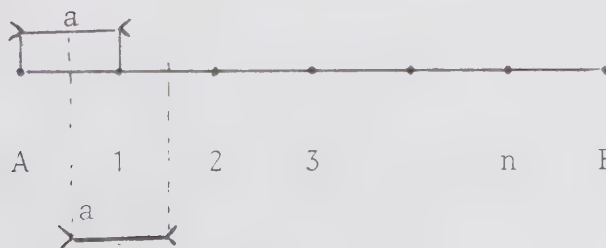
Dans ce qui suit, on se contentera de donner quelques exemples d'application des polynômes de Gegenbauer à des domaines moins connus que ceux cités précédemment.

A) APPLICATIONS DES POLYNÔMES DE GEGENBAUER AU CALCUL DES FREQUENCES

PROPRES DE VIBRATIONS TRANSVERSALES D'UNE CORDE TENDUE. [5] [9] [16]

On se servira dans cette étude de toutes les propriétés des polynômes de Gegenbauer étudiés au chapitre II.

On considère une corde que l'on peut schématiser par un grand nombre de masses identiques équidistantes.



l : sa longueur

ρl : sa masse

T : la force de torsion

On divise la corde en $(n+1)$ parties égales de longueur a ;
($l = (n+1) a$).

Aux n points de divisions sont concentrées des masses égales de

valeur μ , représentant la valeur des masses des parties de corde a , dont ils sont les milieux. La masse des tronçons extrêmes étant supposée concentrée aux extrémités.

$$\rho l = (n+1) \mu .$$

Soit $y_1 \dots y_n$ représentant les déplacements transversaux des diverses portions (points) à partir de leur position d'équilibre.

L'énergie cinétique et potentielle d'un tel système ont respectivement pour expression :

$$\left. \begin{aligned} E_c &= \frac{\mu}{L} \sum_k^n \dot{y}_k^2 , \\ E_p &= h \sum_k \int_k^{k-1} y \, dy = \frac{h}{2} \sum_k (y_k - y_{k-1})^2 . \\ h &= \frac{T}{a} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Le mouvement de la structure étant donné par les équations de Lagrange .

Les forces du système dérivant ici d'une fonction potentielle on écrira donc

$$\begin{aligned} (Q_j &= - \frac{\partial E_p}{\partial y_j}) . \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{y}_k} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial y_k} + \frac{\partial E_p}{\partial y_k} &= 0 . \quad k = 1, 2, \dots n \end{aligned}$$

En calculant par rapport à y_1 on trouve :

$$\mu \ddot{y}_1 + \frac{T}{a} (2y_1 - y_2) = 0 .$$

d'où le système différentiel définissant le mouvement :

$$\left. \begin{aligned} \mu \ddot{y}_1 + \frac{T}{a} (2y_1 - y_2) &= 0 , \\ \mu \ddot{y}_p + \frac{T}{a} (-y_{p-1} + 2y_p - y_{p+1}) &= 0 , \\ \mu \ddot{y}_n + \frac{T}{a} (-y_{n-1} + 2y_n) &= 0 . \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

On cherche une solution de la forme $y_n = A_n e^{i(\omega t - \varphi)}$

d'où :

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{2T}{a} - \mu \omega^2 \right) A_1 - \frac{T}{a} A_2 &= 0, \\ -\frac{T}{a} A_{p-1} + \left(\frac{2T}{a} - \mu \omega^2 \right) A_p - \frac{T}{a} A_{p+1} &= 0, \\ -\frac{T}{a} A_{n-1} + \left(\frac{2T}{a} - \mu \omega^2 \right) A_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

On pose
$$\frac{\frac{2T}{a} - \mu \omega^2}{\frac{T}{a}} = -2x.$$

Le système s'écrit alors :

$$\left. \begin{aligned} -2x A_1 - A_2 &= 0, \\ -A_{p-1} - 2x A_p - A_{p+1} &= 0, \\ -A_{n-1} - 2x A_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Les inconnues de système étant les A_n , le système sera vérifié si le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant n'étant autre que le polynôme de Gegenbauer d'ordre n :

d'où $x_k = \cos \frac{k \pi}{n+1}$. comme l'on avait $\omega = \sqrt{\frac{T}{\mu a}} \sqrt{2(x-1)}$.

L'on déduit que les fréquences propres ont pour valeurs :

$$\boxed{f_k = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{T}{\mu a}} \sin \frac{k \pi}{2(n+1)}} \quad (5)$$

Les modes normaux du système seront :

$$y_k = A_k \cos \left[2 \sqrt{\frac{T}{a}} \sin \frac{k \pi t}{2(n+1)} - \varphi \right] . \quad (6)$$

Si l'on passe à la structure continue en posant $a = \frac{1}{m+1}$ $\mu = \frac{\rho}{m+1}$

La fréquence propre sera : $f_k = \frac{1}{\pi} \frac{m+1}{\rho} \sqrt{\frac{T}{a}} \sin \frac{k \pi}{2(m+1)} .$

$k = 1, 2, \dots m$

Système continu $\Rightarrow m \rightarrow \infty \Rightarrow \sin \frac{k \pi}{2(m+1)} \approx \frac{k \pi}{2(m+1)}$

$$f_k = \frac{k}{2} \sqrt{\frac{T}{\rho}} . \quad (7)$$

La fréquence fondamentale étant donnée pour $k = 1 \Rightarrow f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T}{\rho}} .$

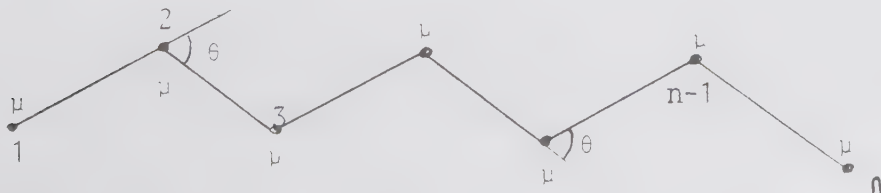
Il est évident que les extensions à cette forme de problème sont nombreuses.

En particulier l'étude des vibrations transversales d'une file de particules identiques et équidistantes, dans laquelle on suppose que les interactions ne s'exercent qu'entre particules voisines, les deux masses extrêmes étant libres, donne pour les fréquences propres les valeurs suivantes :

$$f_p = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}} \sin \frac{p \pi}{2n} . \quad (8)$$

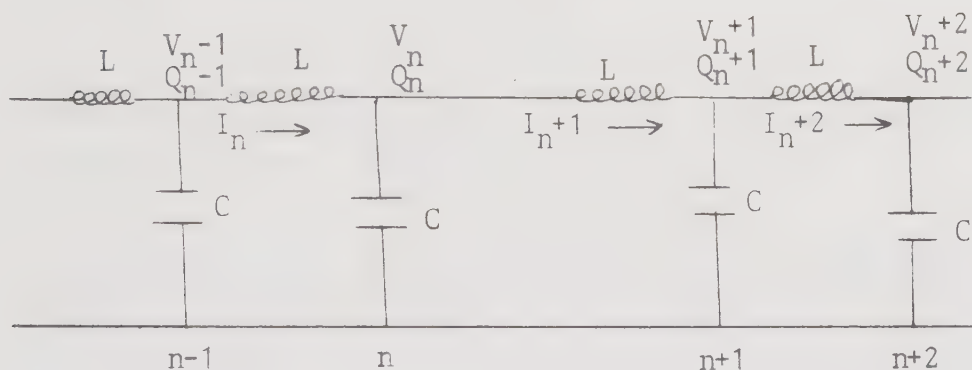
Autrement, toutes les formes de structures envisageables peuvent se calculer par le même principe et toujours à l'aide des polynômes de Gegenbauer.

Exemple : structures en Zig-Zag.



B) EXTENSION DES MODELES MECANQUES PRECEDEMMENT ETUDIES, AU DOMAINE
DE L'ELECTRICITE [5]

Soit l'étude du filtre "passe-bas"



Q_n : charge de la capacité de rang n

V_n : torsion de la capacité de rang n

i_n : intensité entre les capacités de rang (n-1) et n.

On cherche les équations du circuit :

$$V_n = \frac{Q_n}{C} \quad (1) \quad L \frac{d i_n}{dt} = V_{n-1} - V_n = \frac{1}{C} [Q_{n-1} - Q_n] , \quad (9)$$

$$\text{et} \quad i_n - i_{n+1} = \frac{d Q_n}{dt} , \quad (10)$$

$$\text{En dérivant (9)} \quad L \frac{d^2 i_n}{dt^2} = \frac{1}{C} \left[\frac{d Q_{n-1}}{dt} - \frac{d Q_n}{dt} \right] = \frac{1}{C} \left[i_{n-1} - i_n + i_{n+1} - i_n \right] .$$

$$\text{d'où :} \quad L \frac{d^2 i_n}{dt^2} + \frac{1}{C} \left[- i_{n-1} + 2 i_n - i_{n+1} \right] = 0 . \quad (11)$$

On cherchant chaque courant du circuit, on obtiendrait un système de p équations à p inconnues.

D'autre part en comparant avec les équations de mouvement, définissant celui d'un système de n masses équidistantes on retrouve

le même type d'équations (cf § A).

Il suffit pour cela de remplacer $\frac{T}{\mu a}$ par $\frac{1}{L C}$,

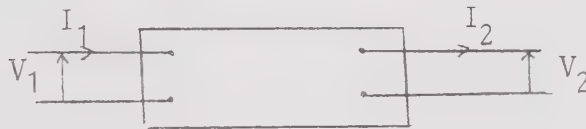
et i_n par y_n .

Les fréquences propres d'un tel système (ici d'un filtre) se calcule donc de la même manière, grâce aux polynômes de Gegenbauer, que dans le cas d'un système mécanique.

Il est à noter que tous les autres cas, des différents types de systèmes mécaniques étudiés ou pouvant être étudiés, trouveraient leurs analogues en électricité et se traiteraient d'une façon identique.

C) APPLICATION DES POLYNÔMES $C_n^1(x)$ DE GEGENBAUER A L'ETUDE

DES QUADRIPOLES . $\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \end{bmatrix}$

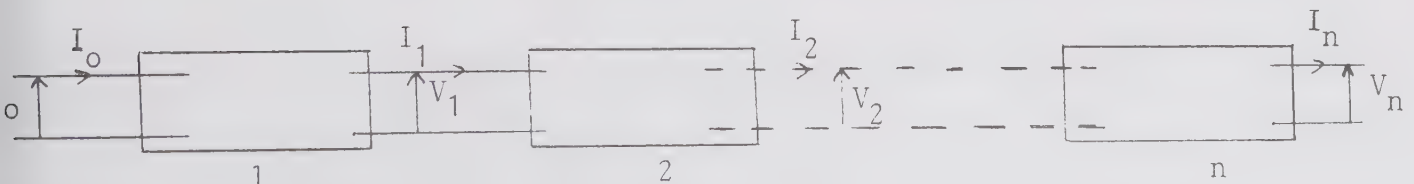


Soit l'équation des quadripôles :

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= a_{11} V_2 + a_{12} I_2 \\ I_1 &= a_{21} V_2 + a_{22} I_2 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

liant les grandeurs d'entrées aux grandeurs de sorties
avec $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 1$.

On considère à présent une chaîne de quadripôles identiques :



On cherche une valeur de x telle que l'expression :

$V_0 - x I_0$ soit proportionnelle à $V_1 - x I_1$.

On trouve en utilisant (12) :

$$V_0 - x I_0 = (a_{11} - x a_{21}) V_1 + (a_{12} - x a_{22}) I_1 . \quad (13)$$

$$\text{avec comme coefficient de proportionnalité } \eta = \frac{a_{11} - x a_{21}}{1} = \frac{a_{12} - x a_{22}}{-x} \quad (14)$$

$$\text{de (3) on tire } a_{21} x^2 - (a_{11} - a_{22}) x - a_{12} = 0 . \quad (15)$$

Soient x_1 et x_2 les racines de l'équation (15).

Il existe donc deux fonctions. $V_0 - x_1 I_0$ et $V_0 - x_2 I_0$, qui qui se reproduisent à un coefficient de proportionnalité près lorsque l'on passe des bornes d'entrées aux bornes de sorties du quadripôle.

L'on remarquera qu'aux deux valeurs de x correspondent deux valeurs de η

$$\eta_1 = a_{21} - \frac{a_{12}}{x_1} , \quad \eta_2 = a_{21} - \frac{a_{12}}{x_2} ,$$

L'équation aux η s'écrit : $\eta^2 - (a_{11} + a_{22}) \eta + 1 = 0$.

Les équations (12) du quadripôle peuvent donc se remplacer par :

$$\left. \begin{aligned} V_0 - x_1 I_0 &= \eta_1 (V_1 - x_1 I_1) , \\ V_0 - x_2 I_0 &= \eta_2 (V_1 - x_2 I_2) . \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{où pour la chaîne de quadripôles } V_0 - x_1 I_0 &= \eta_1^n (V_n - x_1 I_n) , \\ V_0 - x_2 I_0 &= \eta_2^n (V_n - x_2 I_n) . \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Il vient :

$$\left. \begin{aligned} V_n &= \frac{x_1 \eta_1^n - x_2 \eta_2^n}{x_1 - x_2} V_0 - x_1 x_2 \frac{\eta_1^n - \eta_2^n}{x_1 - x_2} I_0 , \\ I_n &= \frac{\eta_1^n - \eta_2^n}{x_1 - x_2} V_0 - \frac{x_2 \eta_1^n - x_1 \eta_2^n}{x_1 - x_2} I_0 . \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Autrement dit la chaîne de quadripôle se trouve représentée, après quelques calculs, par une matrice T de la forme :

$$T = \left[\begin{array}{cc} -a_{11} \frac{\eta_1^n - \eta_2^n}{\eta_1 - \eta_2} + \frac{\eta_1^{n+1} - \eta_2^{n+1}}{\eta_1 - \eta_2}, & -a_{12} \frac{\eta_1^n - \eta_2^n}{\eta_1 - \eta_2} \\ -a_{21} \frac{\eta_1^n - \eta_2^n}{\eta_1 - \eta_2}, & a_{12} \frac{\eta_1^n - \eta_2^n}{\eta_1 - \eta_2} - \frac{\eta_1^{n-1} - \eta_2^{n-1}}{\eta_1 - \eta_2} \end{array} \right] \quad (19)$$

En sachant que $x_1 - x_2 = -\frac{\eta_1 - \eta_2}{a_{21}}$, $x_1 x_2 = -\frac{a_{12}}{a_{21}}$.

En revenant aux polynômes $C_n^1(x)$ de Gegenbauer, nous avons vu qu'ils étaient définis sous forme de déterminant de degré n.

On peut chercher à les exprimer sous une autre forme ;

On considère la relation de récurrence : $C_{n+2}^1 - 2x C_{n+1}^1 + C_n^1 = 0$,

Et on cherche la solution sous la forme $C_n^1(x) = r^n$

r est solution de l'équation du second degré $r^2 - 2x r + 1 = 0$.

de racines $r_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$.

La solution de récurrence peut donc s'écrire $C_n^1(x) = A(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + B(x - \sqrt{x^2 - 1})^n$

A et B se déterminent à partir de $C_0^1(x) = 1$ et $C_1^1(x) = 2x$.

En définitive $C_n^1(x) = \frac{r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{r_1 - r_2}$.

Comme η_1 et η_2 sont racines de l'équation en η , la matrice T pourra s'écrire :

$$T = \left[\begin{array}{cc} -a_{11} C_{n-1}^1(x) + C_n^1(x) & , & -a_{12} C_{n-1}^1(x) \\ -a_{21} C_{n-1}^1(x) & , & a_{11} C_{n-1}^1(x) - C_{n-2}^1(x) \end{array} \right] \quad (20)$$

Remarque : Introduction des polynômes $C_n^1(x)$ dans le calcul de l'impédance itérative.

Des équations (17) on tire : en posant $\frac{V_o}{I_o} = Z_o$ et $\frac{V_n}{I_n} = Z_n$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_o - x_1 = \eta_1^n (Z_n - x_1) , \\ Z_o - x_2 = \eta_2^n (Z_n - x_2) . \end{array} \right. \quad \text{d'où} \quad \frac{Z_n - x_1}{Z_n - x_2} = \frac{Z_o - x_1}{Z_o - x_2} \frac{\eta_2^n}{\eta_1^n} .$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } Z_o = x_1 \quad Z_n = x_1 \\ Z_o = x_2 \quad Z_n = x_2 \end{array} \right\} \quad \forall n .$$

Ainsi Z_o prend la valeur x_1 ou x_2 , Z_n conservera toujours la même valeur $\forall n$, ceci démontre que x_1 et x_2 sont bien les impédances itératives (ou caractéristiques) du système.

L'impédance itérative est donc solution de l'équation (15) tel qu'il y ait proportionnalité des valeurs entre l'entrée et la sortie.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] - ANGOT.A - Compléments de Mathématiques
Editions de la revue d'optique - PARIS - 1961
- [2] - BALBI.J.H. - Approximations supérieures de la théorie de la
synchronisation de J. HAAG
Thèse, université de Besançon 1971
- [3] - BERNARD.M. - Utilisation des polynômes ultrasphériques pour la
résolution approchée des équations différentielles.
D.E.A. Université de Besançon - 1973
- [4] - R.BOU Equations différentielles fonctionnelles non autonomes :
Solution périodique proche d'une approximation critique.

Equations différentielles et fonctionnelles non linéaires.

Edité par P. JANSSENS, J. MAWHIN et N. ROUCHE
HERMANN - PARIS - 1973
- [5] - BRILLOUIN.L
PARODI.M - Propagation des ondes dans les milieux périodiques.
MASSON & Cie - DUNOD - PARIS - 1956.
- [6] - CHALEAT.R - Calcul de la période des petites oscillations en fonction
de leur amplitude.
Cras, t. 246 - 1958
- [7] - DENMAN.H.H. - Application of ultraspherical polynomials to, non linear
HOWARD.J oscillations
and KINGLIU.Y Quaterly of Application Mathematics
Volume 4 et 21 , année 1964, 1965.

- [8] - GUELFOND.A.O - Calcul des différences finies.
DUNOD - PARIS.
- [9] - GUILLET.A - Propriétés des polynômes électrosphériques.
AUBERT.M. GAUTHIER-VILLARS - PARIS - 1948.
- [10] - HAAG.J - a) Sur certains systèmes différentiels à solutions périodiques.
Bull. Sc. Math. 1946.
- HAAG.J - b) Les mouvements vibratoires
Presses universitaires de France
Tome I - 1951.
- [11] - HAYASHI.C - Non Linear oscillations in Physical systems.
MC.GRAW-HILL BOOK COMPANY - 1964
- [12] - HOWARD.J.E. - Asymetric oscillations
Journal of app. Math. Volume 16 - 1968.
- [13] - JANSSENS.P.
MAWHIN.J. - Equations différentielles et fonctionnelles
ROUCHE.N. non linéaires.
- [14] - KING-LIU.Y. - Applications of ultrasphérique polynomials to,
non-linear Forced oscillations.
Journal of appl. Méchanics.
Vol.34 - Série E - N° 1 - 1967.
- [15] - KUNFER.A - Fourier Séries.
and KADLEC.J. ILIFFE BOOKS - LONDON.
- [16] - PARODI.M. - Application des polynômes électrosphériques à
l'étude des systèmes oscillants à un grand nombre
de degrés de liberté.
GAUTHIER-VILLARS - PARIS - 1944.

- [17] - SHOHAT.J. - Théorie des polynômes de Tchebycheff.
GAUTHIER-VILLARS - PARIS - 1948.
- [18] - STOKES.A. - On the approximation of non-linear oscillations.
International Conference on non linear oscillations.
ICNO - KIEV - 1969.
- [19] - URABE.M. - Numérical Study of périodic solutions of Van der Pol
équation.
Institute of Mathématiques Académy of Sciences of the
UKRAINE SSR - KIEV - 1961.
- [20] - VAN DOOREN.R. - An analytical méthode for certain weakly non linéar
périodic différential systems.
Bulletin de la classe des Sciences
5ème série - Tome LVIII - BRUXELLES - 1972.
- [21] - VOGEL.T. - Les fonctions orthogonales dans les problèmes aux
limites de la physique mathématique.
C.N.R.S. - 1953.
- [22] - Les Vibrations forcées dans les systèmes non-linéaires.
Colloques internationaux du C.N.R.S.-1965
- a) - URABE.M. - Galerkin's procédure for non linéar périodic systems.
(page 217)
- b) - ARGEMI.J. - Etude numérique de la stabilité des solutions
et JURICIC.H. périodiques de l'équation de Duffing.
- [23] - CLENSHAW.C.W. - The solution of Vander Pol's Equation in Tchebycheff
Series.

